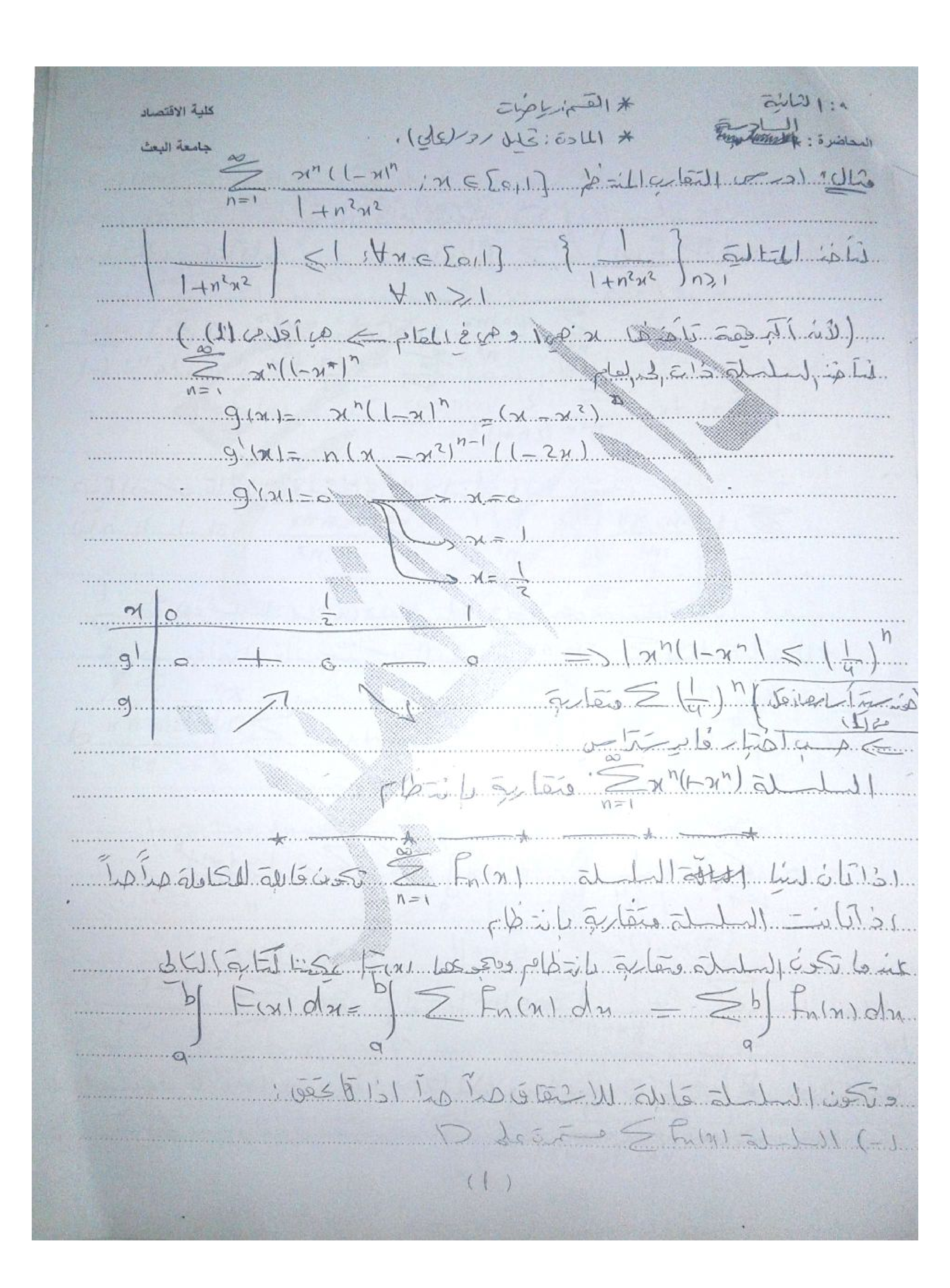


كلية الاقتصاد ‏* القسم: رياضيات ‏س: الثانية
جامعة البعث ‏* المادة: تحليل رد/ (عالي) ‏المحاضرة: السادسة

مثال: ادرس التقارب المنتظم $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)^n}{1+n^2x^2}$; $x \in [0,1]$

نأخذ المتتالية $\left\{\frac{1}{1+n^2x^2}\right\}_{n\geq 1}$; $\left|\frac{1}{1+n^2x^2}\right| \leq 1$; $\forall x \in [0,1]$; $\forall n \geq 1$

(لأنه أكبر قيمة تأخذها x هي 0 وهي في المقام ⟸ هي أقل من (1))

نأخذ السلسلة ذات الحد العام $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^n$

$g(x) = x^n(1-x)^n = (x-x^2)$

$g'(x) = n(x-x^2)^{n-1}(1-2x)$

$g'(x) = 0 \to x = 0$, $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
g'	0	$+$	0	$-$	0
g		↗		↘	

$\Rightarrow |x^n(1-x)^n| \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\sum \left(\frac{1}{4}\right)^n$ متقاربة (هندسية أساسها أصغر من (1))

⟸ حسب اختبار فايرشتراس

السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)^n$ متقاربة بانتظام

* ——— * ——— * ——— * ——— *

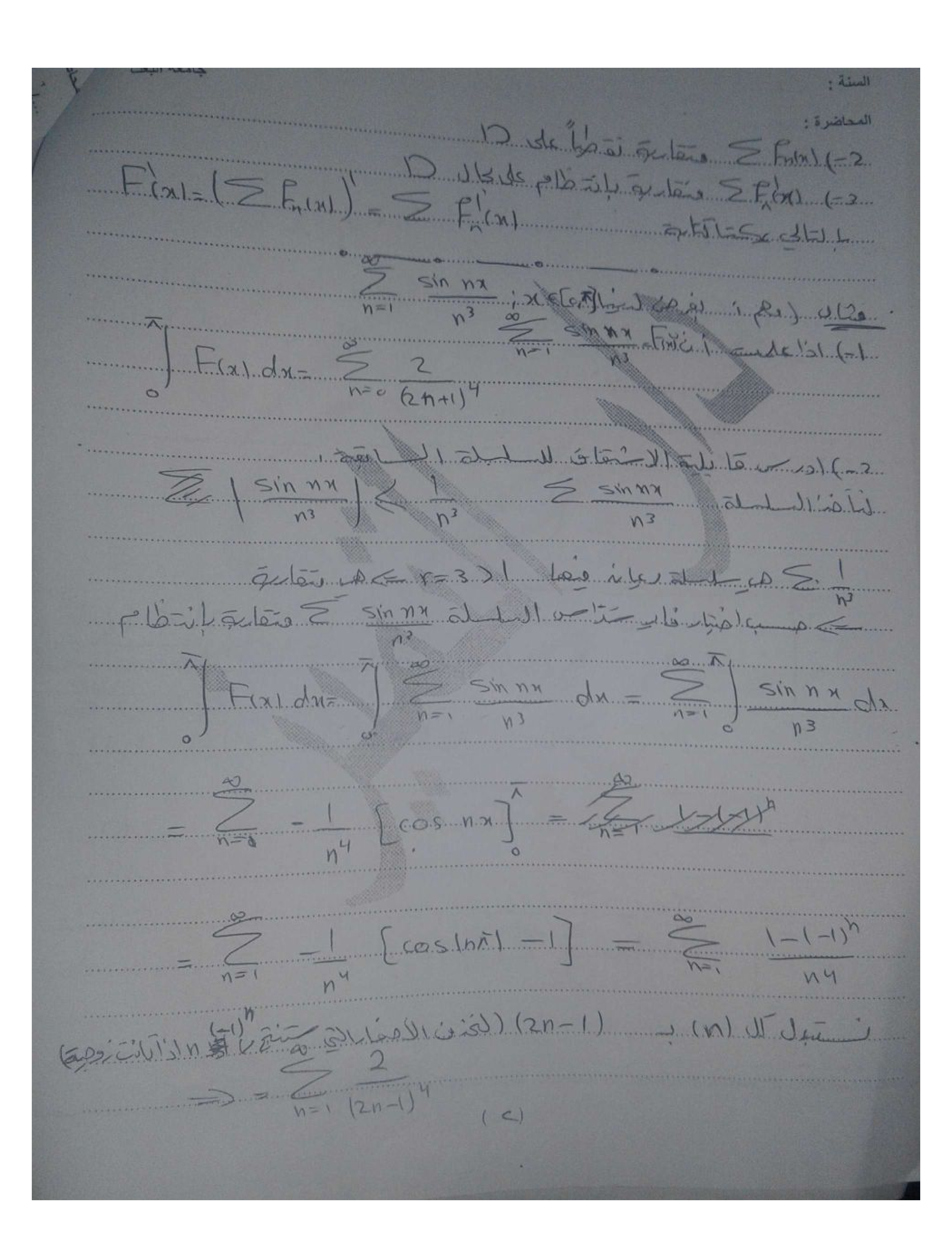
إذا كانت لدينا السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ تكون قابلة للمكاملة حداً حداً إذا كانت السلسلة متقاربة بانتظام

عندما تكون السلسلة متقاربة بانتظام ومجموعها $F(x)$ يمكننا كتابة التالي

$$\int_a^b F(x)\,dx = \int_a^b \sum f_n(x)\,dx = \sum \int_a^b f_n(x)\,dx$$

وتكون السلسلة قابلة للاشتقاق حداً حداً إذا تحقق:

1- السلسلة $\sum f_n(x)$ مستمرة على D



السنة :

المحاضرة :

2-) $\sum F_n(x)$ متقاربة نقطياً على D

3-) $\sum F'_n(x)$ متقاربة بانتظام على مجال D

بالتالي يمكننا كتابة

$$F'(x) = \left(\sum F_n(x)\right)' = \sum F'_n(x)$$

مثال: (رقم 1) لتكن السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$; $x \in [0,\pi]$

1-) اذا علمت أن $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$

$$\int_0^{\pi} F(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{(2n+1)^4}$$

2-) ادرس قابلية الاشتقاق للسلسلة السابقة

لنأخذ السلسلة $\sum \frac{\sin nx}{n^3}$; $\sum \left|\frac{\sin nx}{n^3}\right| \le \sum \frac{1}{n^3}$

$\sum \frac{1}{n^3}$ هي سلسلة ريمان فيها $r = 3 > 1$ ⟸ هي متقاربة

⟸ حسب اختبار فاير شتراس السلسلة $\sum \frac{\sin nx}{n^3}$ متقاربة بانتظام

$$\int_0^{\pi} F(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n^3}\,dx$$

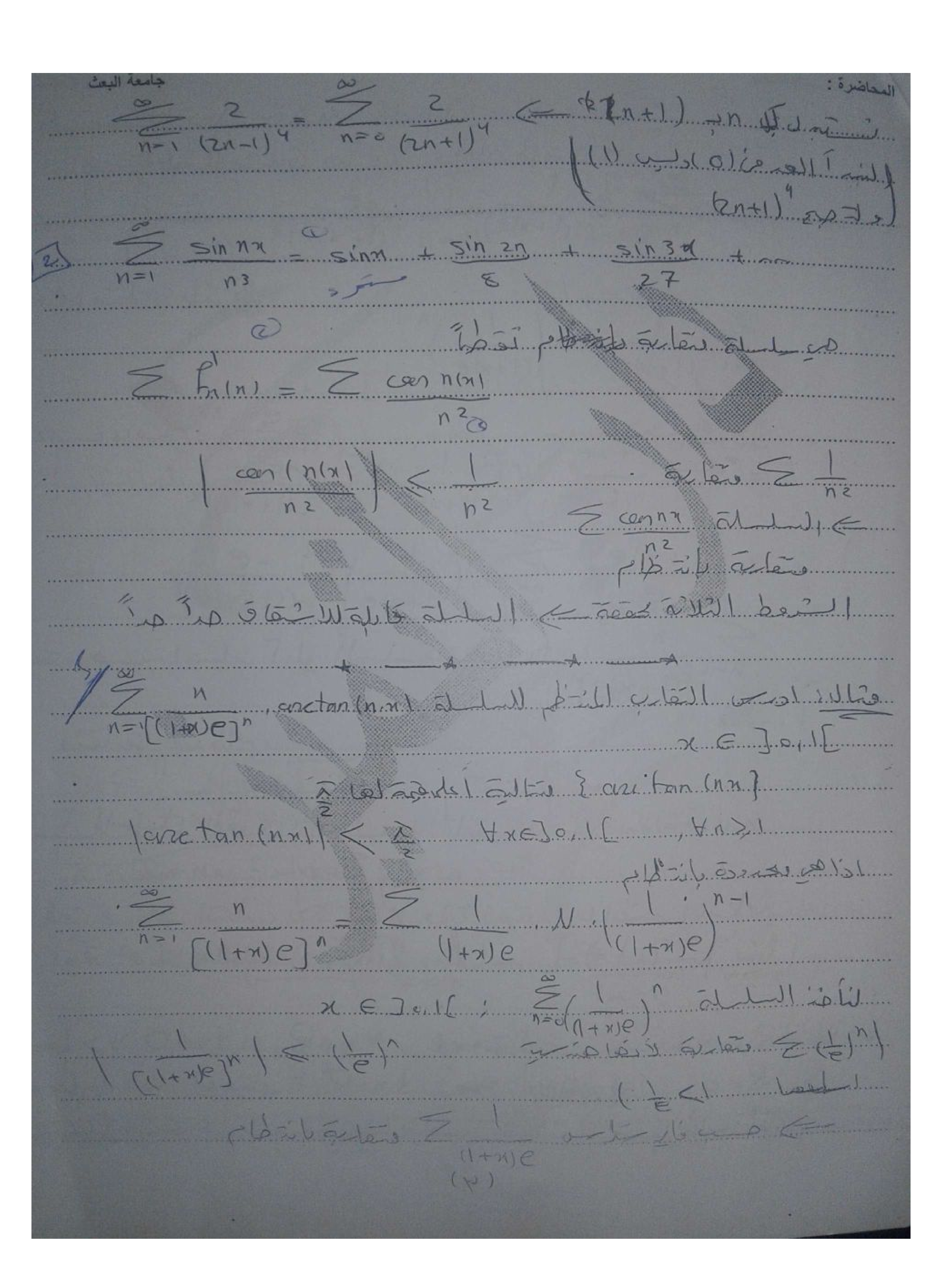
$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^4}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n^4}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n}{n^4}$$

نستبدل كل (n) بـ $(2n-1)$ لنحذف الأصفار التي تنتج عن $(-1)^n$ اذا كانت زوجية

$$\Rightarrow = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)^4}$$

(c)



$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{(2n-1)^4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^4}$$ ⇐ نستبدل كل n بـ $(n+1)$

(لنبدأ العد من (0) بدلاً من (1) ونحصل $(2n+1)^4$)

2) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3} = \sin x + \frac{\sin 2x}{8} + \frac{\sin 3x}{27} + \dots$$

مستمرة

هي سلسلة متقاربة بانتظام تقريباً

$$\sum f_n'(x) = \sum \frac{\cos n(x)}{n^2}$$

$$\left|\frac{\cos(n(x))}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$$ ، $\sum \frac{1}{n^2}$ متقاربة

⇐ السلسلة $\sum \frac{\cos nx}{n^2}$ متقاربة بانتظام

الشروط الثلاثة محققة ⇐ السلسلة قابلة للاشتقاق حداً حداً

مثال: ادرس التقارب المنتظم للسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{[(1+x)e]^n}\arctan(nx)$ ، $x \in]0,1[$

متتالية $\{\arctan(nx)\}$ محدودة لها $\frac{\pi}{2}$

$$|\arctan(nx)| \le \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in]0,1[\ , \ \forall n \ge 1$$

اذاً هي محدودة بانتظام

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{[(1+x)e]^n} = \sum \frac{1}{(1+x)e} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{(1+x)e}\right)^{n-1}$$

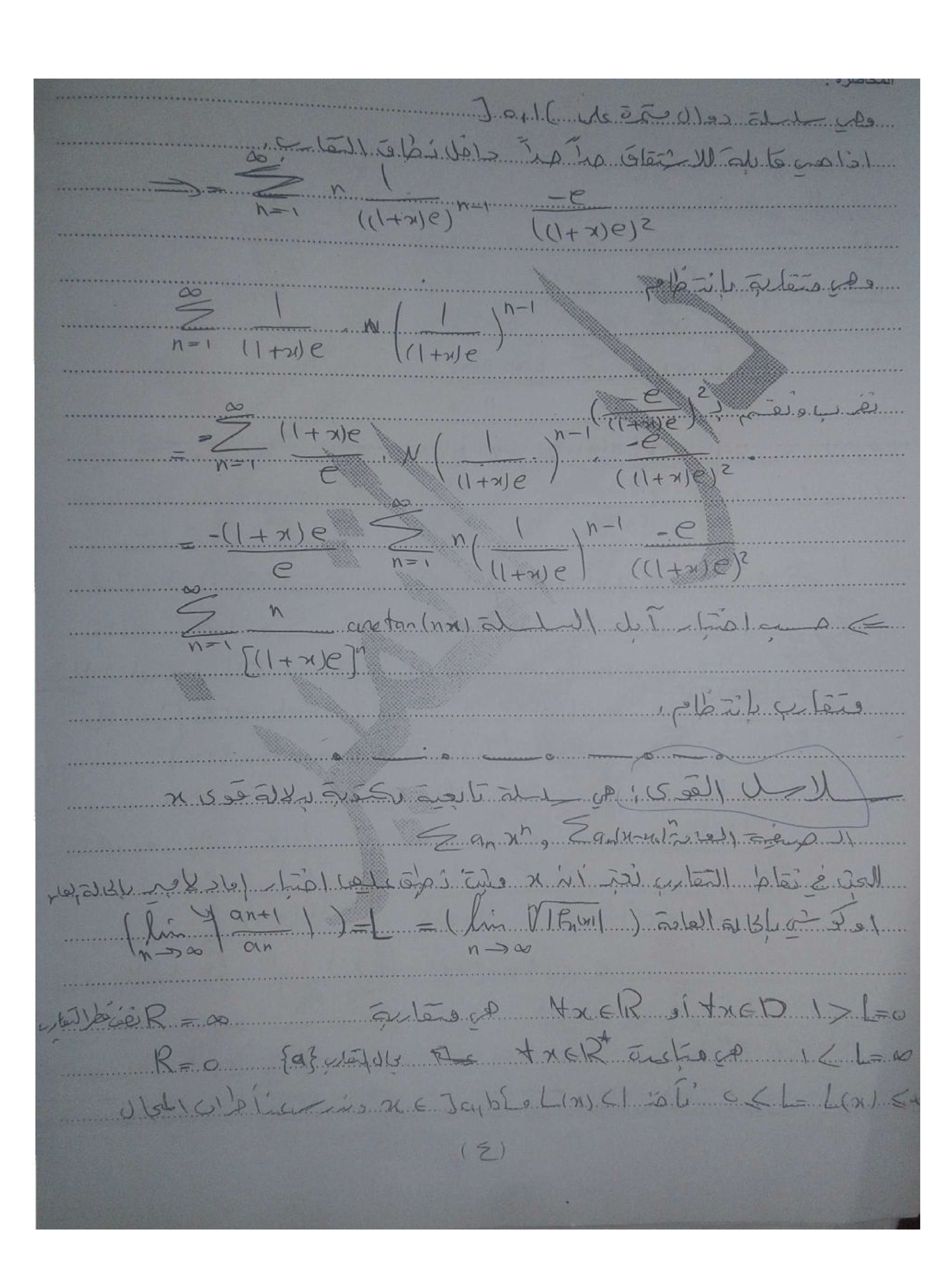
لنأخذ السلسلة $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(1+x)e}\right)^n$; $x \in]0,1[$

$$\left|\frac{1}{[(1+x)e]^n}\right| \le \left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$\sum \left(\frac{1}{e}\right)^n$ متقاربة لأنها هندسية أساسها ($\frac{1}{e} < 1$)

⇐ حسب فايرشتراس $\sum \frac{1}{(1+x)e}$ متقاربة بانتظام

Scanned by CamScanner



وهي سلسلة دوال مستمرة على]1,0[

اذا هي قابلة للاشتقاق حداً حداً داخل نطاق التقارب

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n \frac{1}{((1+x)e)^{n-1}} \cdot \frac{-e}{((1+x)e)^2}$$

وهي متقاربة بانتظام

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x)e} \cdot n \left(\frac{1}{(1+x)e}\right)^{n-1}$$

نضرب ونقسم في $\left(\frac{-e}{((1+x)e)}\right)^2$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x)e}{e} \cdot n \left(\frac{1}{(1+x)e}\right)^{n-1} \cdot \frac{-e}{((1+x)e)^2}$$

$$= \frac{-(1+x)e}{e} \sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{(1+x)e}\right)^{n-1} \frac{-e}{((1+x)e)^2}$$

حسب اختبار آبل السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{[(1+x)e]^n} \arctan(nx)$ ⇐

متقاربة بانتظام.

سلاسل القوى: هي سلسلة تابعية مكونة بدلالة قوى x

الصيغة العامة $\sum a_n (x-x_0)^n$, $\sum a_n x^n$

البحث في نقاط التقارب نجد أن x مثبتة نطبق عليها اختبار إيجاد لاوبي بالحالة بعام

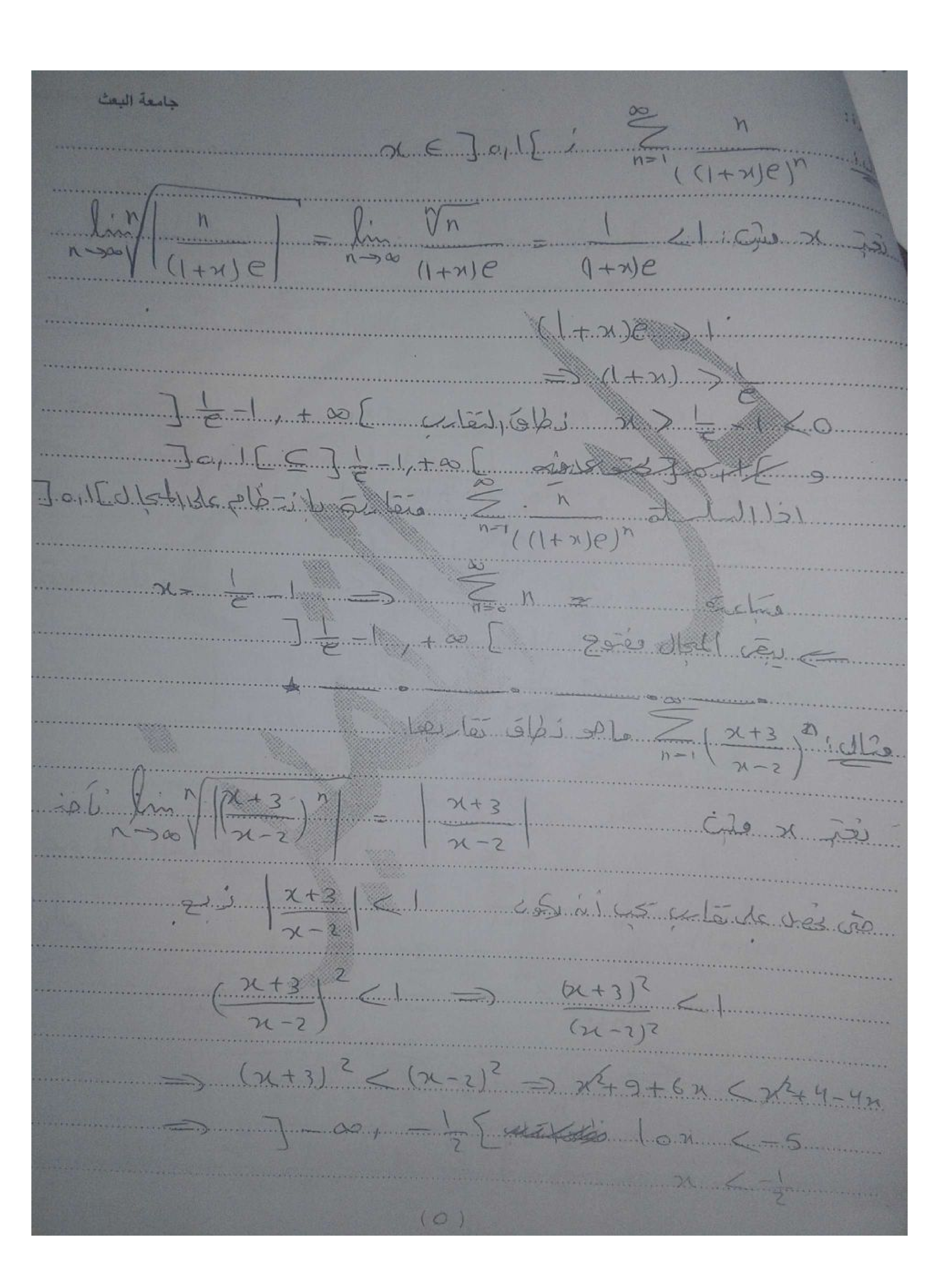
أو كوشي بالحالة العامة $\left(\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n(x)|}\right) = L = \left(\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right)$

$L = 0 < 1$ $\forall x \in D$ أو $\forall x \in \mathbb{R}$ هي متقاربة $R = \infty$ نصف قطر التقارب

$L = \infty > 1$ هي متباعدة $\forall x \in \mathbb{R}^*$ مجال التقارب $\{a\}$ $R = 0$

$L(x) < 1$ ⇐ $c < L = $ تأخذ $L(x) < 1$ ومنه $x \in]a, b[$ ندرس حصنا أطراف المجال

Scanned by CamScanner



جامعة البعث

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{((1+x)e)^n}$; $x \in]0,1[$

نختبر x مثبت: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n}{(1+x)e}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{(1+x)e} = \frac{1}{(1+x)e} < 1$

$(1+x)e > 1$

$\Rightarrow (1+x) > \frac{1}{e}$

$0 < \frac{1}{e} - 1 < x$ نطاق التقارب $]\frac{1}{e}-1, +\infty[$

و $]1,+\infty[$ محتواة $]\frac{1}{e}-1,+\infty[\;]0,1[\subseteq$

اذا السلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{((1+x)e)^n}$ متقاربة بانتظام على المجال $]0,1[$

$x = \frac{1}{e} - 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} n =$ متباعدة

$\Leftarrow$ يبقى المجال مفتوح $]\frac{1}{e}-1, +\infty[$

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^n$ ما هو نطاق تقاربها

نختبر x مثبت نأخذ $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^n\right|} = \left|\frac{x+3}{x-2}\right|$

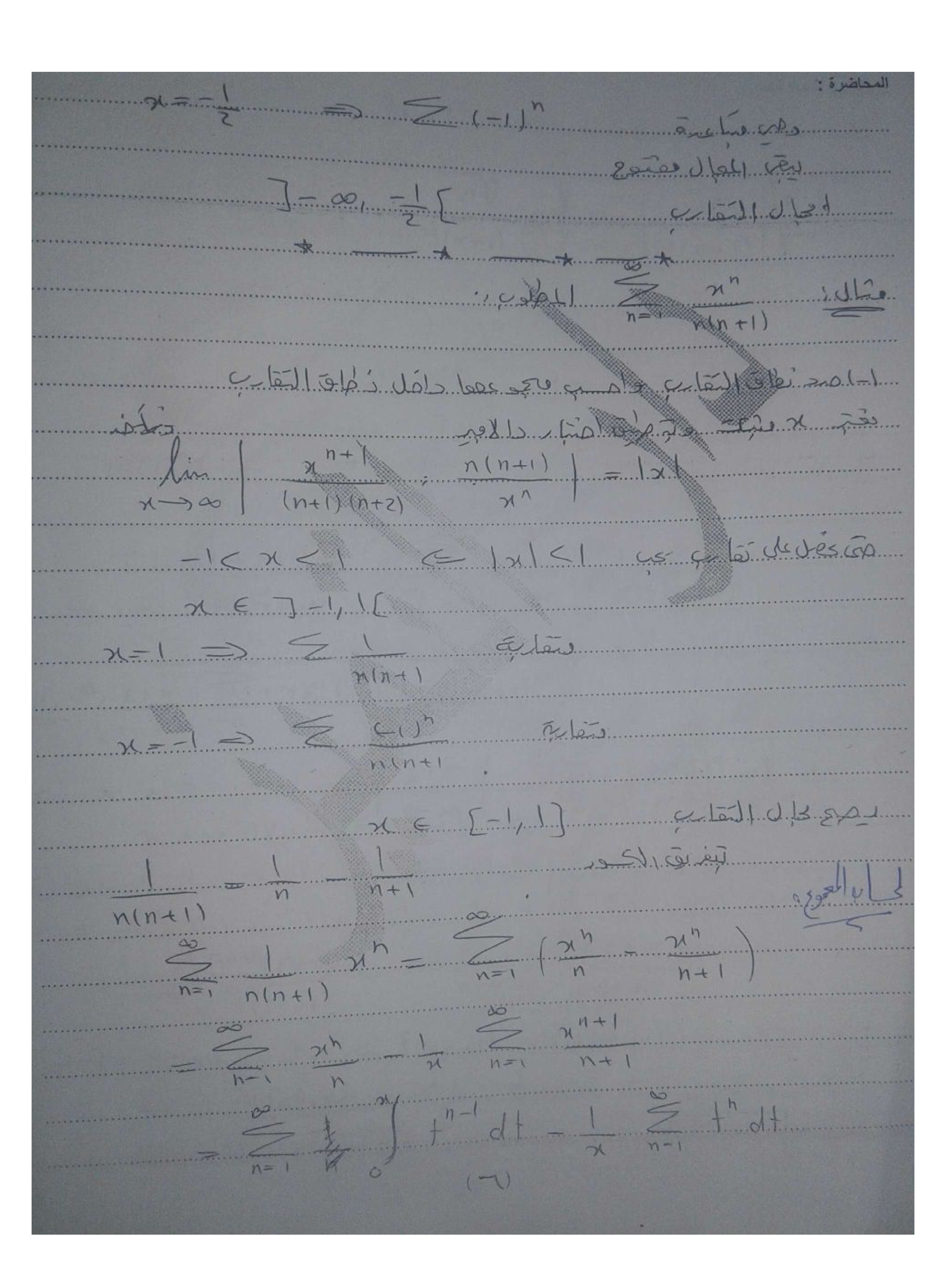
حتى نحصل على تقارب يجب أن يكون $\left|\frac{x+3}{x-2}\right| < 1$ نربع

$\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^2 < 1 \Rightarrow \frac{(x+3)^2}{(x-2)^2} < 1$

$\Rightarrow (x+3)^2 < (x-2)^2 \Rightarrow x^2+9+6x < x^2+4-4x$

$\Rightarrow]-\infty, -\frac{1}{2}[$ نطاق التقارب $\quad 10x < -5$

$x < -\frac{1}{2}$



المحاضرة :

$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \sum (-1)^n$

حدي متباعدة

يبقى المجال مفتوح

المجال التقارب $]-\infty, -\frac{1}{2}[$

* ——— * ——— * ——— *

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$ المطلوب:

١- اوجد نطاق التقارب واحسب مجموعها داخل نطاق التقارب

نعتبر x مثبت ونطبق اختبار دالامبير ونلاحظ

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{n(n+1)}{x^n} \right| = |x|$$

حتى نحصل على تقارب يجب $|x| < 1 \Leftarrow -1 < x < 1$

$x \in]-1, 1[$

$x = 1 \Rightarrow \sum \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة

$x = -1 \Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n(n+1)}$ متقاربة.

يصبح مجال التقارب $x \in [-1, 1]$

تبسيط الكسر

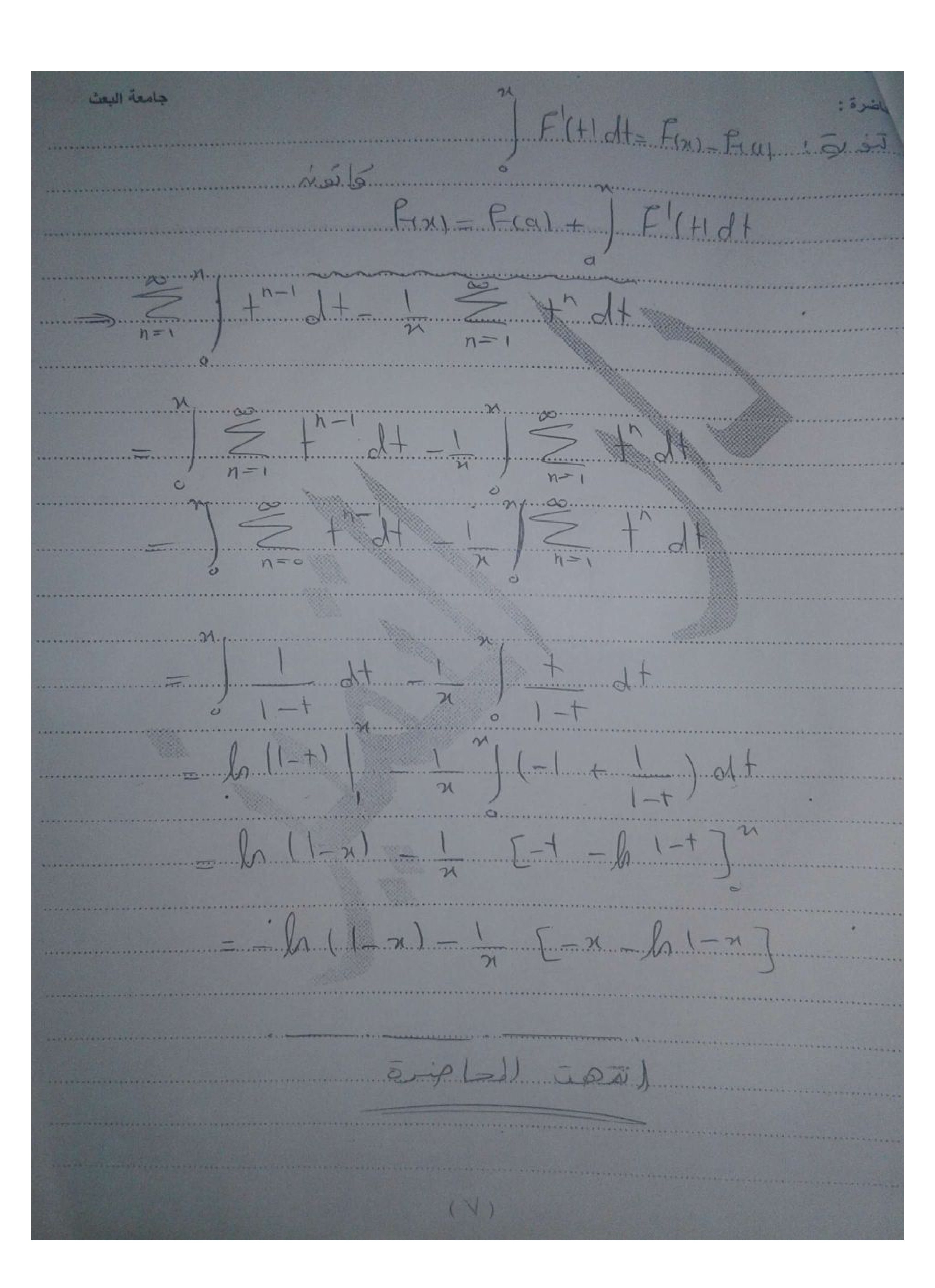
$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

لحساب المجموع:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^n}{n+1} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\,dt - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} t^n\,dt$$



تذكرة : $\int_a^x F'(t)\,dt = F(x) - F(a)$

فإنه

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x t^{n-1}\,dt - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} t^{n}\,dt$$

$$= \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1}\,dt - \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n}\,dt$$

$$= \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{n-1}\,dt - \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^{n}\,dt$$

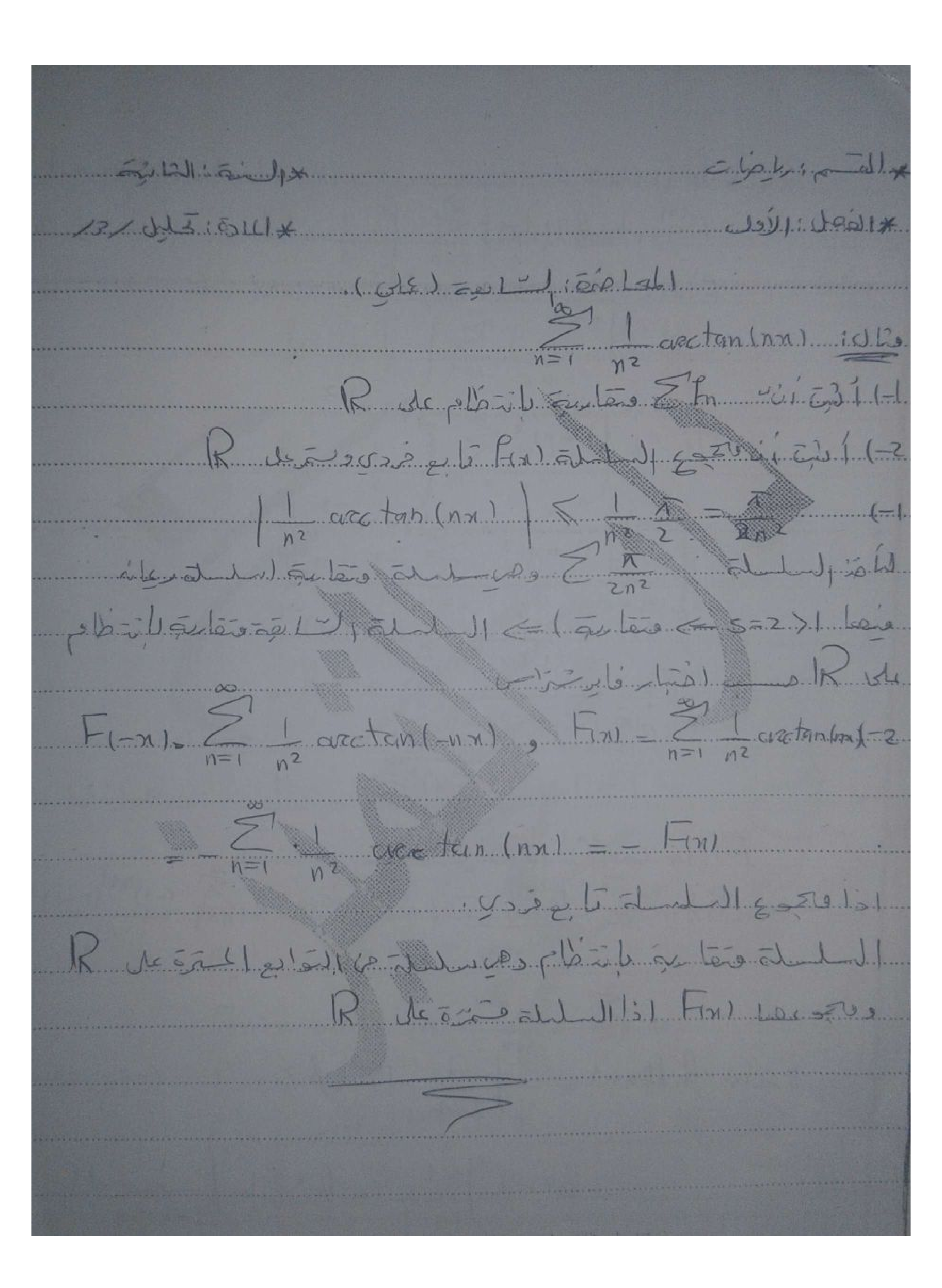
$$= \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt - \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{1-t}\,dt$$

$$= \ln(1-t)\Big|_0^x - \frac{1}{x} \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-t}\right) dt$$

$$= \ln(1-x) - \frac{1}{x} \Big[-t - \ln(1-t)\Big]_0^x$$

$$= \ln(1-x) - \frac{1}{x} \Big[-x - \ln(1-x)\Big]$$

انتهت المحاضرة



*القسم: رياضيات *السنة: الثانية

*الفصل: الأول *المادة: تحليل ٣

الملاحظة: السابقة (على).

مثال: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$

١- أثبت أن $\sum f_n$ متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$

٢- أثبت أن مجموع السلسلة $F(x)$ تابع فردي ومستمر على $\mathbb{R}$

الحل:

١- $\left| \frac{1}{n^2} \arctan(nx) \right| \leq \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2n^2}$

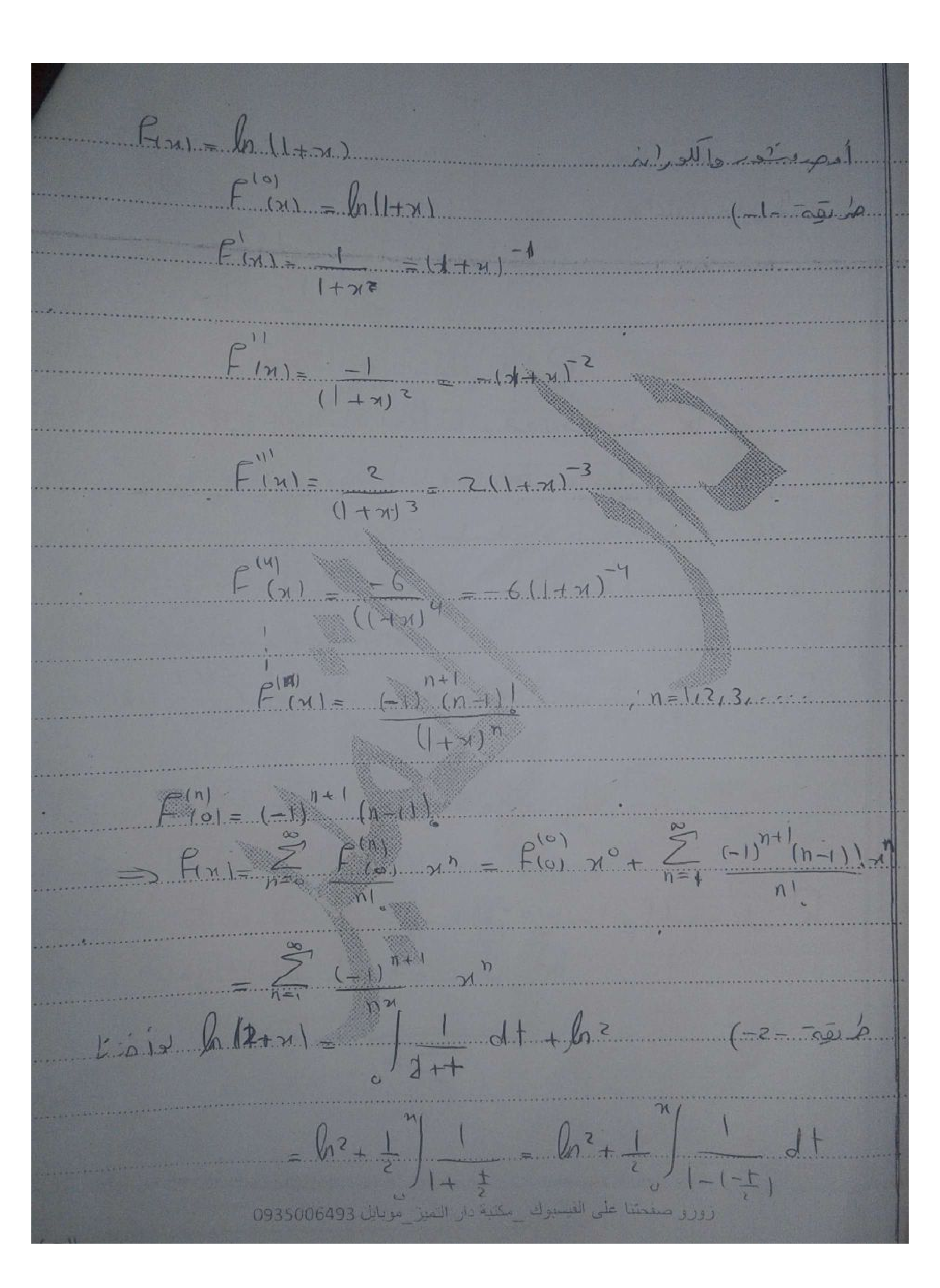
نأخذ السلسلة $\sum \frac{\pi}{2n^2}$ وهي سلسلة متقاربة (سلسلة ريمان فيها $s=2>1$) ⟸ متقاربة) ⟸ السلسلة السابقة متقاربة بانتظام على $\mathbb{R}$ حسب اختبار فايرشتراس

٢- $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx)$ و $F(-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(-nx)$

$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \arctan(nx) = -F(x)$

اذا مجموع السلسلة تابع فردي.

السلسلة متقاربة بانتظام وهي سلسلة من التوابع المستمرة على $\mathbb{R}$ ومجموعها $F(x)$ اذا السلسلة مستمرة على $\mathbb{R}$



أوجد منشور ماكلوران

$f(x) = \ln(1+x)$

طريقة -1-

$$f^{(0)}(x) = \ln(1+x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$f''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2} = -(1+x)^{-2}$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3} = 2(1+x)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{-6}{(1+x)^4} = -6(1+x)^{-4}$$

$\vdots$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n} \quad ; n = 1, 2, 3, \dots$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

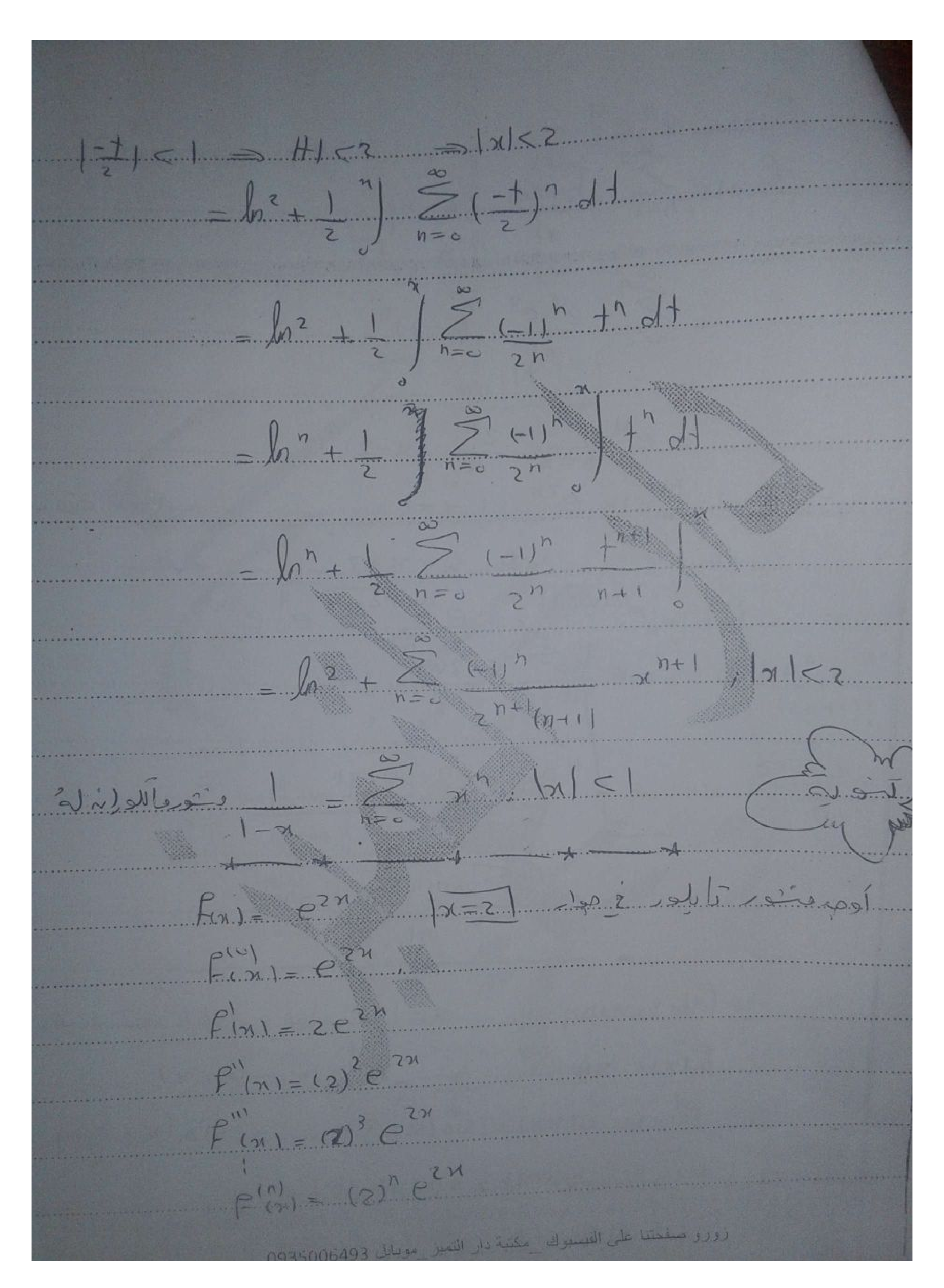
$$\Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f^{(0)}(0)\, x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n-1)!\, x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

طريقة -2-

لنأخذ $\ln(2+x) = \int_0^x \frac{1}{2+t}\, dt + \ln 2$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+\frac{t}{2}} = \ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1-\left(-\frac{t}{2}\right)}\, dt$$



$\left|\frac{-t}{2}\right| < 1 \Rightarrow |t| < 2 \Rightarrow |x| < 2$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-t}{2}\right)^n dt$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} t^n dt$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \int_0^x t^n dt$$

$$= \ln 2 + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \left.\frac{t^{n+1}}{n+1}\right|_0^x$$

$$= \ln 2 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} x^{n+1} \quad , |x| < 2$$

وشو والدوالية له $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad , |x| < 1$

تنويه

أوجد منشور تايلور في جوار $\boxed{x = 2}$

$f(x) = e^{2x}$

$f^{(0)}(x) = e^{2x}$

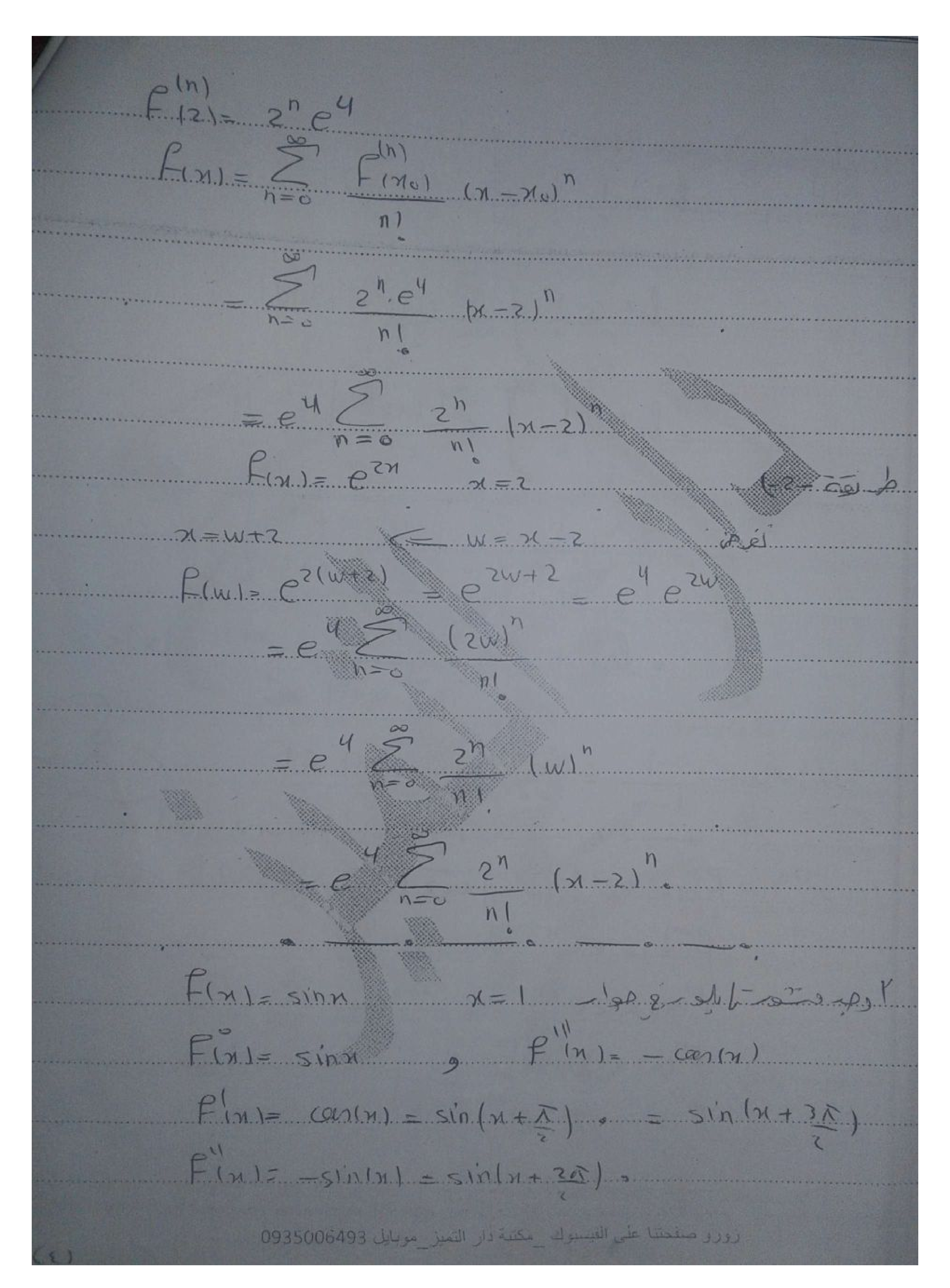
$f'(x) = 2e^{2x}$

$f''(x) = (2)^2 e^{2x}$

$f'''(x) = (2)^3 e^{2x}$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = (2)^n e^{2x}$



$f^{(n)}(2) = 2^n e^4$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n . e^4}{n!} (x-2)^n$$

$$= e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (x-2)^n$$

$f(x) = e^{2x}$ $\quad x = 2$ طريقة (2)

$x = w+2 \quad \Leftarrow \quad w = x-2$ نغير

$$f(w) = e^{2(w+2)} = e^{2w+2} = e^4 e^{2w}$$

$$= e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2w)^n}{n!}$$

$$= e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (w)^n$$

$$= e^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (x-2)^n .$$

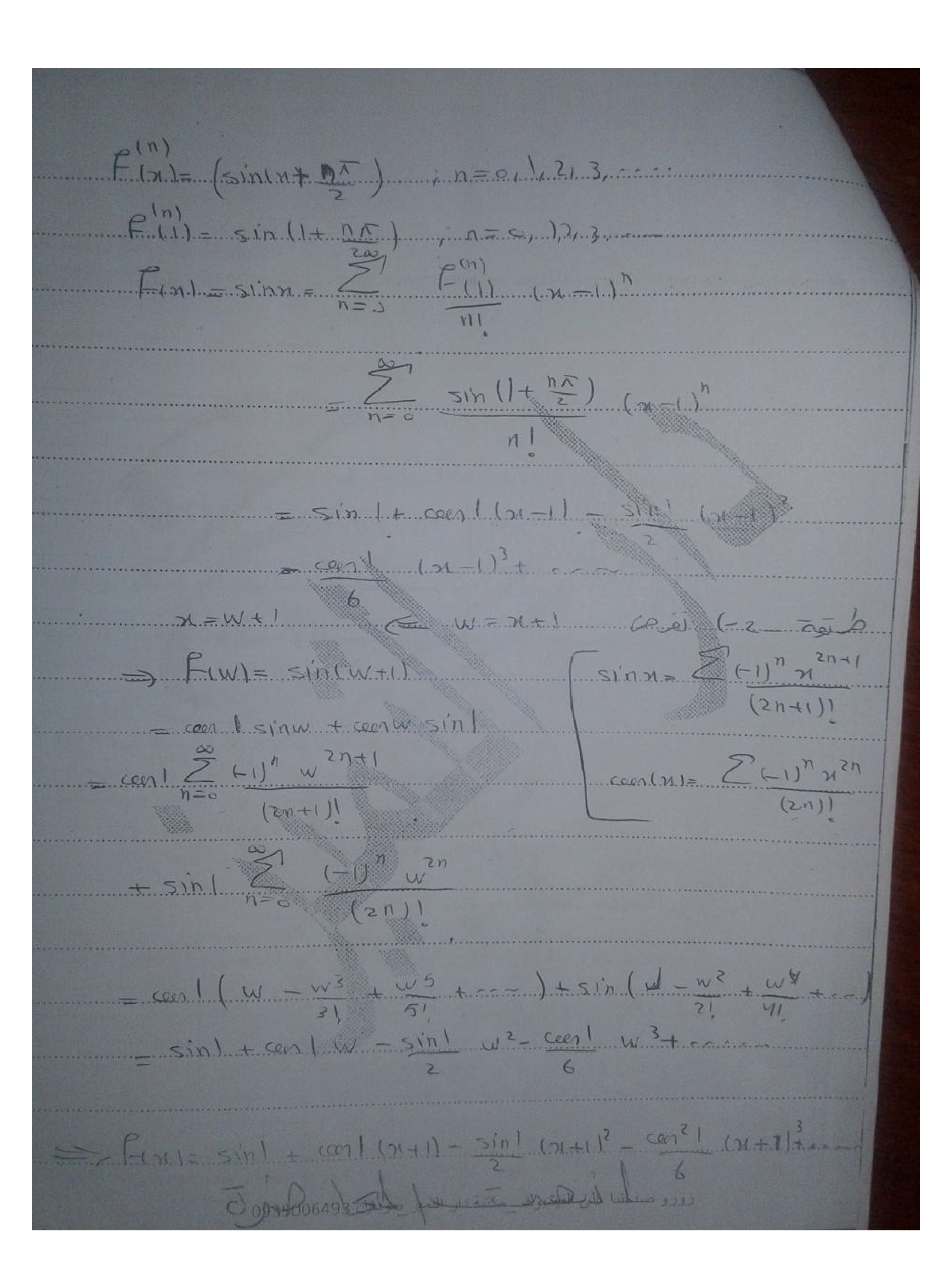
---

٢) أوجد منشور تايلور حول $\quad x = 1 \quad$ $f(x) = \sin x$

$f^{\circ}(x) = \sin x$ $\quad$ و $\quad f'''(x) = -\cos(x)$

$f'(x) = \cos(x) = \sin(x + \frac{\pi}{2})$. $= \sin(x + \frac{3\pi}{2})$

$f''(x) = -\sin(x) = \sin(x + \frac{2\pi}{2})$.



$f^{(n)}(x) = \left(\sin(x + \frac{n\pi}{2}\right)$; $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$f^{(n)}(1) = \sin(1 + \frac{n\pi}{2})$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

$$f(x) = \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(1+\frac{n\pi}{2})}{n!}(x-1)^n$$

$$= \sin 1 + \cos 1 (x-1) - \frac{\sin 1}{2}(x-1)^2 - \frac{\cos 1}{6}(x-1)^3 + \dots$$

طريقة 2 — نعوض $w = x+1 \Leftarrow$ $x = w+1$

$$\Rightarrow f(w) = \sin(w+1)$$

$$= \cos 1 \sin w + \cos w \sin 1$$

$$\sin x = \sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = \sum \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

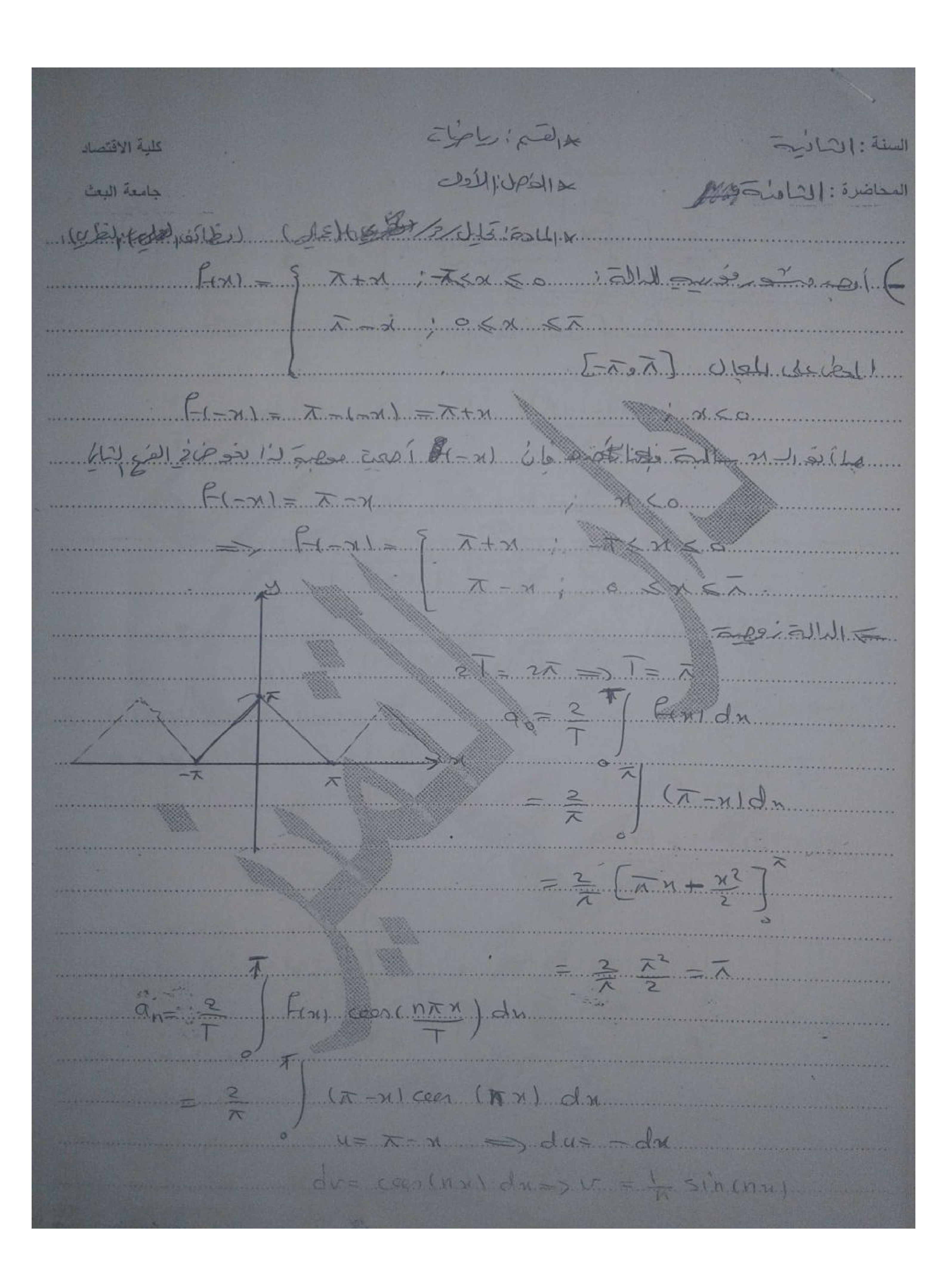
$$= \cos 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n+1}}{(2n+1)!} + \sin 1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n}}{(2n)!}$$

$$= \cos 1 \left(w - \frac{w^3}{3!} + \frac{w^5}{5!} + \dots\right) + \sin 1 \left(1 - \frac{w^2}{2!} + \frac{w^4}{4!} + \dots\right)$$

$$= \sin 1 + \cos 1\, w - \frac{\sin 1}{2} w^2 - \frac{\cos 1}{6} w^3 + \dots$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin 1 + \cos 1 (x+1) - \frac{\sin 1}{2}(x+1)^2 - \frac{\cos^2 1}{6}(x+1)^3 + \dots$$

Scanned by CamScanner



السنة : الثانية — القسم : رياضيات — كلية الاقتصاد

المحاضرة : الثامنة — الفصل الأول — جامعة البعث

المادة: تحليل رياضي (2) (وظائف عملي/نظري)

- أوجد سلسلة فورييه للدالة:

$$f(x) = \begin{cases} \pi + x ; & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x ; & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

المعطاة على المجال $[-\pi, \pi]$.

$f(-x) = \pi - (-x) = \pi + x \quad ; \quad x < 0$

هنا نعوض بـ $-x$ بدلاً من x فإذا كانت x موجبة فإن $f(-x)$ أصبحت سالبة لذا نعوض في الفرع الثاني

$f(-x) = \pi - x \quad ; \quad x < 0$

$$\Rightarrow f(-x) = \begin{cases} \pi + x ; & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi - x ; & 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

الدالة زوجية

$2T = 2\pi \Rightarrow T = \pi$

$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^{\pi} f(x)\, dx$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x)\, dx$

$= \frac{2}{\pi} \left[\pi x + \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi}$

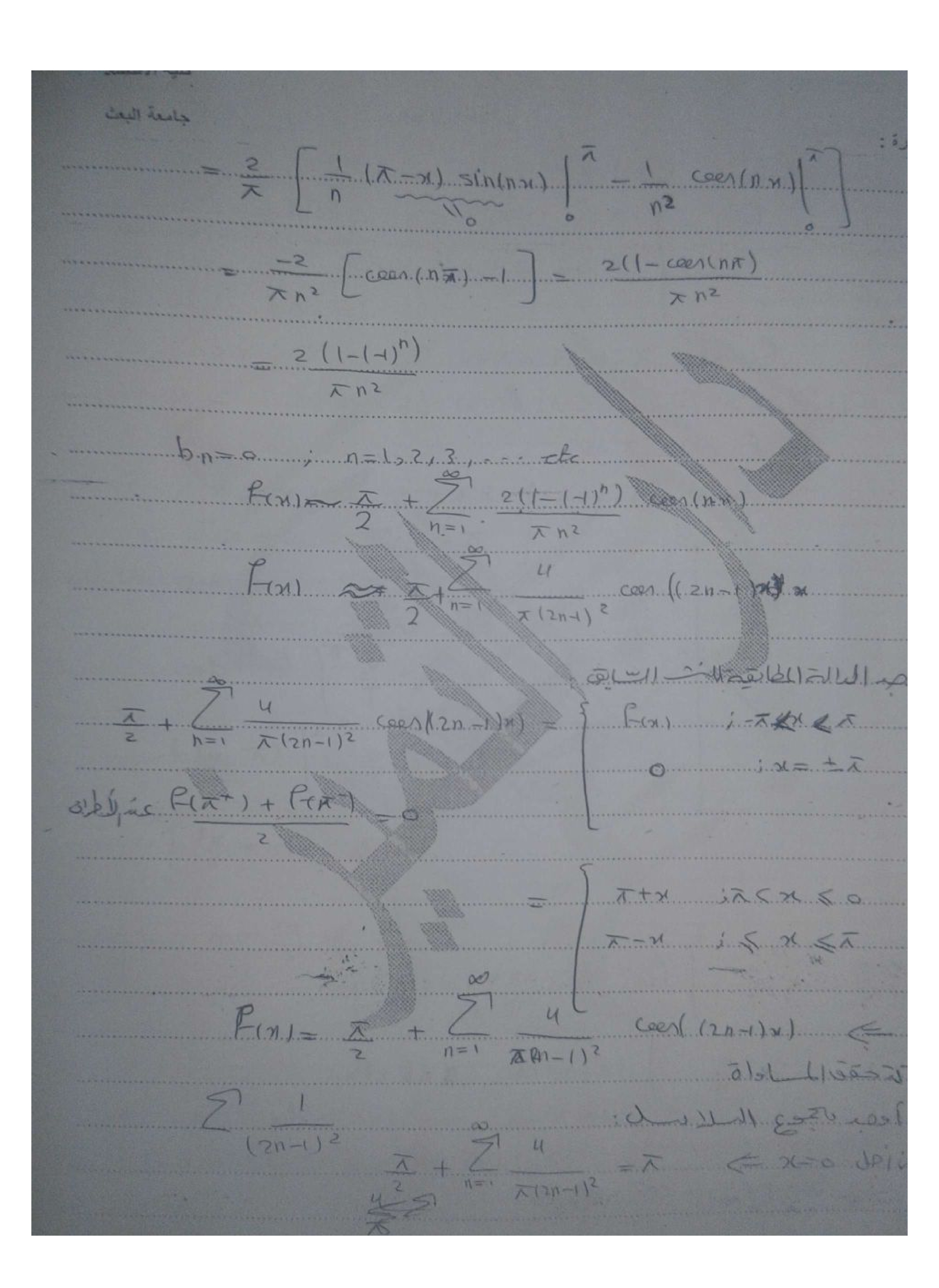
$= \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$

$a_n = \frac{2}{T} \int_0^{\pi} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$

$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos(nx)\, dx$

$u = \pi - x \Rightarrow du = -dx$

$dv = \cos(nx)\, dx \Rightarrow v = \frac{1}{n} \sin(nx)$



جامعة البعث

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n}(\pi - x)\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n^2}\cos(nx)\Big|_0^{\pi}\right]$$

$$= \frac{-2}{\pi n^2}\left[\cos(n\pi) - 1\right] = \frac{2(1-\cos(n\pi))}{\pi n^2}$$

$$= \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}$$

$b_n = 0 \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \dots$ etc

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1-(-1)^n)}{\pi n^2}\cos(nx)$$

$$f(x) \approx \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)$$

حسب المبرهنة المطابقة للبحث السابق

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x) = \begin{cases} f(x) & ; -\pi < x < \pi \\ 0 & ; x = \pm\pi \end{cases}$$

عند الأطراف $\frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = 0$

$$= \begin{cases} \pi + x & ; -\pi < x \leq 0 \\ \pi - x & ; 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

$$\Leftarrow \quad f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)$$

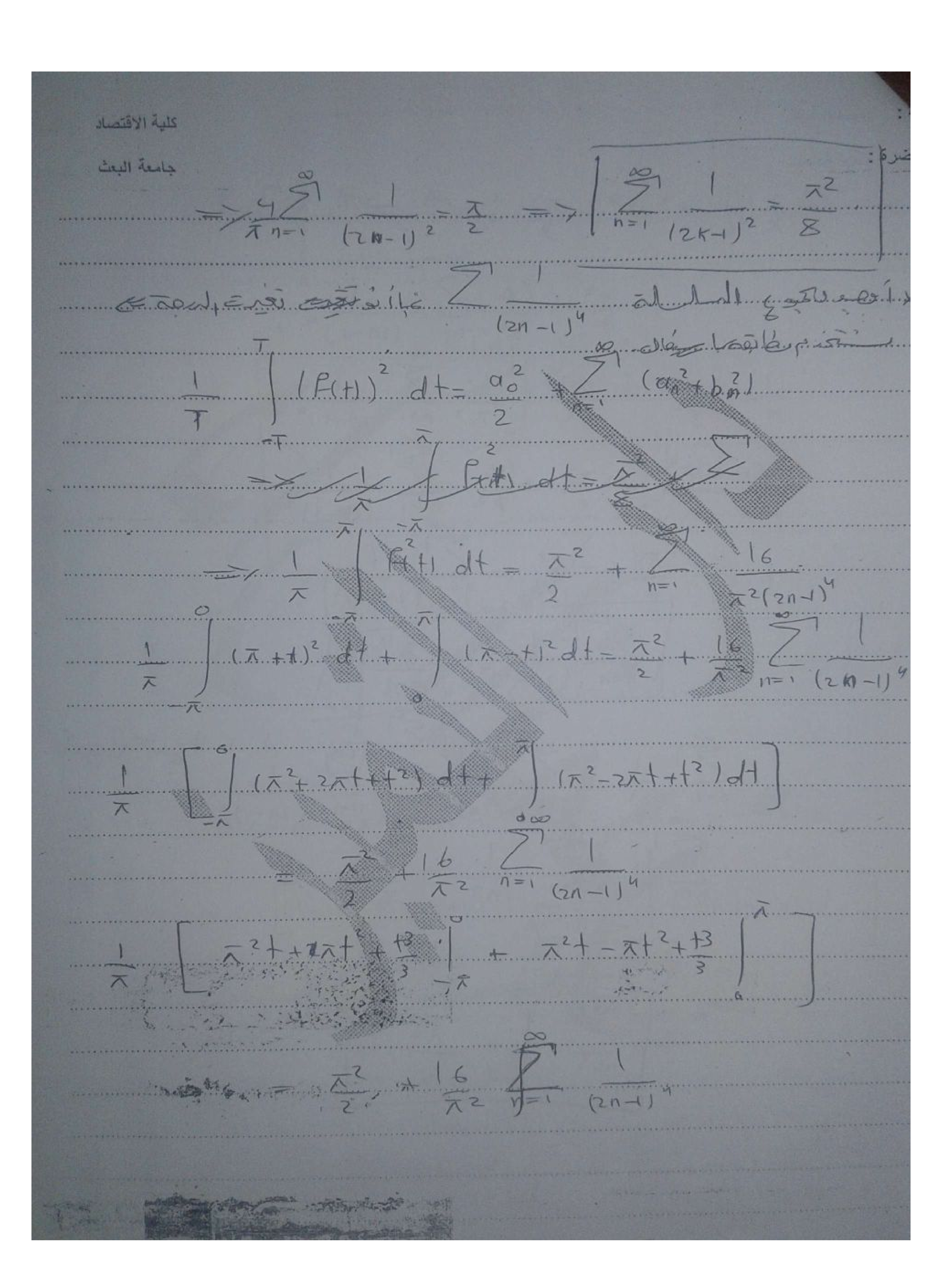
تتحقق المساواة

أوجد مجموع السلاسل: $\sum \frac{1}{(2n-1)^2}$

بإحلال $x = 0 \Leftarrow$

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2n-1)^2} = \pi$$

$\frac{4}{\pi}\sum$



كلية الاقتصاد

جامعة البعث

$$\Rightarrow \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}}$$

٤) أوجد المجموع السلسلة $\sum \frac{1}{(2n-1)^4}$ [illegible]

نستخدم مطابقة بارسفال

$$\frac{1}{T}\int_{-T}^{T} (f(t))^2\, dt = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt = \frac{\pi^2}{2} + \sum$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(t)\, dt = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1} \frac{16}{\pi^2(2n-1)^4}$$

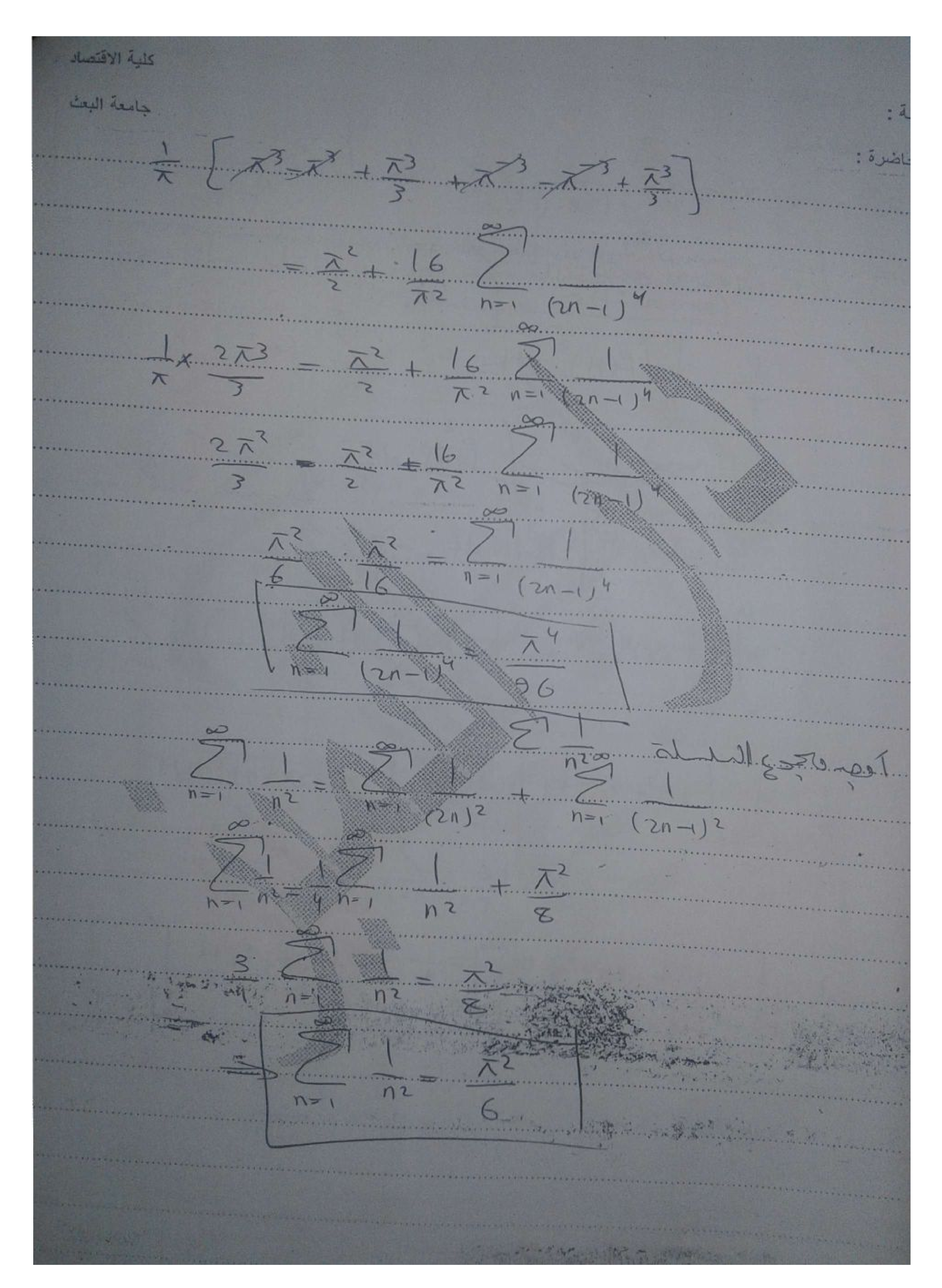
$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (\pi + t)^2\, dt + \int_{0}^{\pi} (\pi - t)^2\, dt = \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (\pi^2 + 2\pi t + t^2)\, dt + \int_{0}^{\pi} (\pi^2 - 2\pi t + t^2)\, dt\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\frac{1}{\pi}\left[\pi^2 t + \pi t^2 + \frac{t^3}{3}\Big|_{-\pi}^{0} + \pi^2 t - \pi t^2 + \frac{t^3}{3}\Big|_{0}^{\pi}\right]$$

$$= \frac{\pi^2}{2} + \frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$$



$$\frac{1}{\pi}\left[\pi^3-\pi^3+\frac{\pi^3}{3}+\pi^3-\pi^3+\frac{\pi^3}{3}\right]$$

$$=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\frac{1}{\pi}\times\frac{2\pi^3}{3}=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\frac{2\pi^2}{3}=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\frac{\pi^2}{6}\cdot\frac{\pi^2}{16}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}}$$

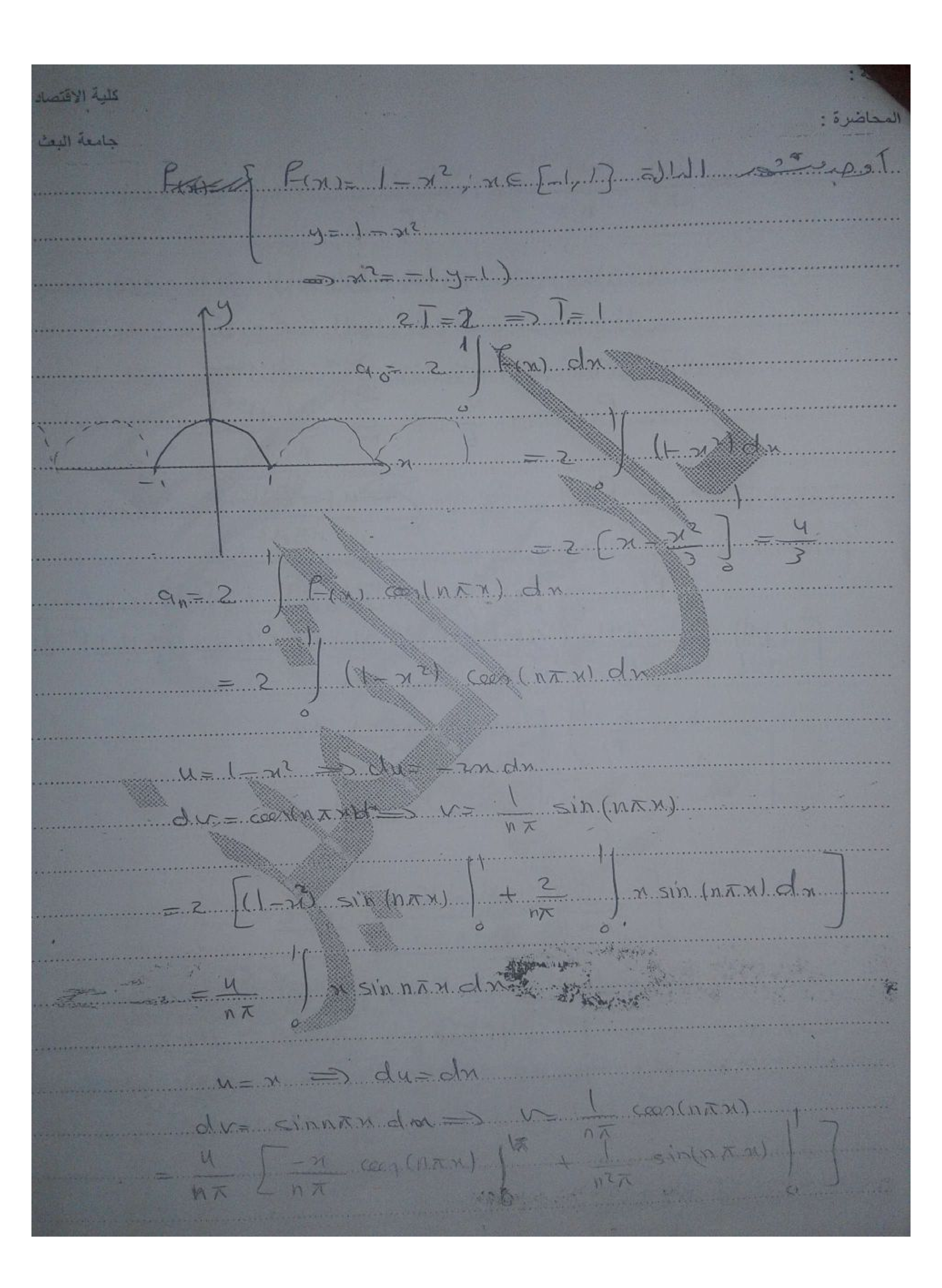
أوجد مجموع السلسلة $\sum \frac{1}{n^2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+\frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}}$$



أوجد منشور الدالة

$$f(x) = 1 - x^2 \; ; \; x \in [-1, 1]$$

$$y = 1 - x^2$$

$$\Rightarrow x^2 = -(y-1)$$

$$2T = 2 \Rightarrow T = 1$$

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 (1 - x^2)\,dx$$

$$= 2\left[x - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$= 2\int_0^1 (1 - x^2)\cos(n\pi x)\,dx$$

$$u = 1 - x^2 \Rightarrow du = -2x\,dx$$

$$dv = \cos(n\pi x)\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$$

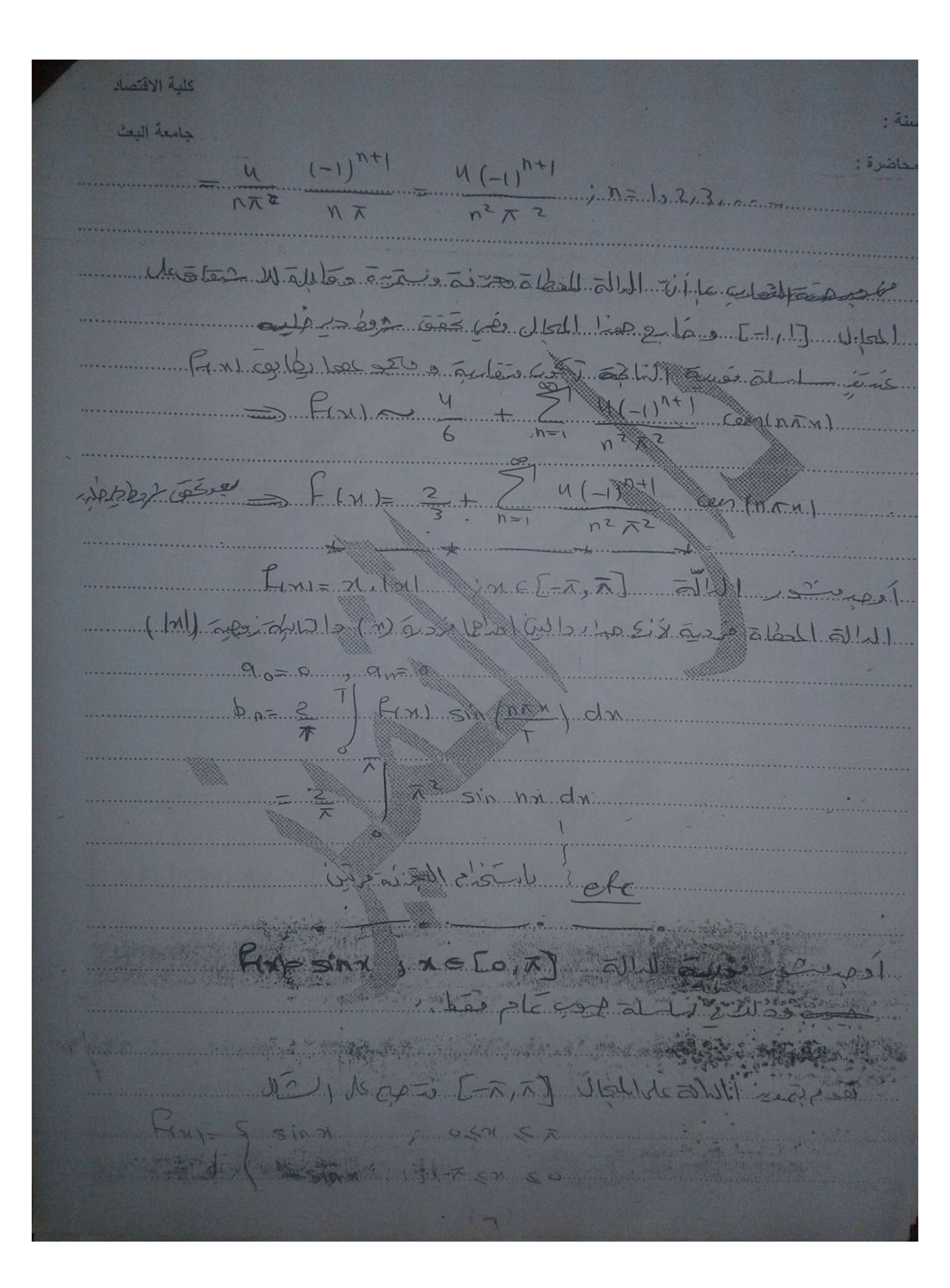
$$= 2\left[(1 - x^2)\sin(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 x\sin(n\pi x)\,dx\right]$$

$$= \frac{4}{n\pi}\int_0^1 x\sin n\pi x\,dx$$

$$u = x \Rightarrow du = dx$$

$$dv = \sin n\pi x\,dx \Rightarrow v = \frac{1}{n\pi}\cos(n\pi x)$$

$$= \frac{4}{n\pi}\left[\frac{-x}{n\pi}\cos(n\pi x)\Big|_0^1 + \frac{1}{n^2\pi}\sin(n\pi x)\Big|_0^1\right]$$



$$= \frac{4}{n\pi^2} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n\pi} = \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \;;\; n = 1,2,3,\ldots$$

[illegible] عا أن الدالة المعطاة مجزأة ومستمرة وقابلة للاشتقاق على المجال [-1,1] وخارج هذا المجال فهي تحقق شروط ديريخليه
عندئذ سلسلة فورييه الناتجة تكون متقاربة وتعطي تقارب f(x)

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{4}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)$$

محققة شروط ديريخليه

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^{n+1}}{n^2\pi^2} \cos(n\pi x)$$

أوجد منشور الدالة $f(x) = x\,|x| \;;\; x \in [-\pi, \pi]$

الدالة المعطاة فردية لأنها جداء دالتين إحداهما فردية (x) والثانية زوجية (|x|)

$a_0 = 0 \;,\; a_n = 0$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right) dx$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin nx \, dx$$

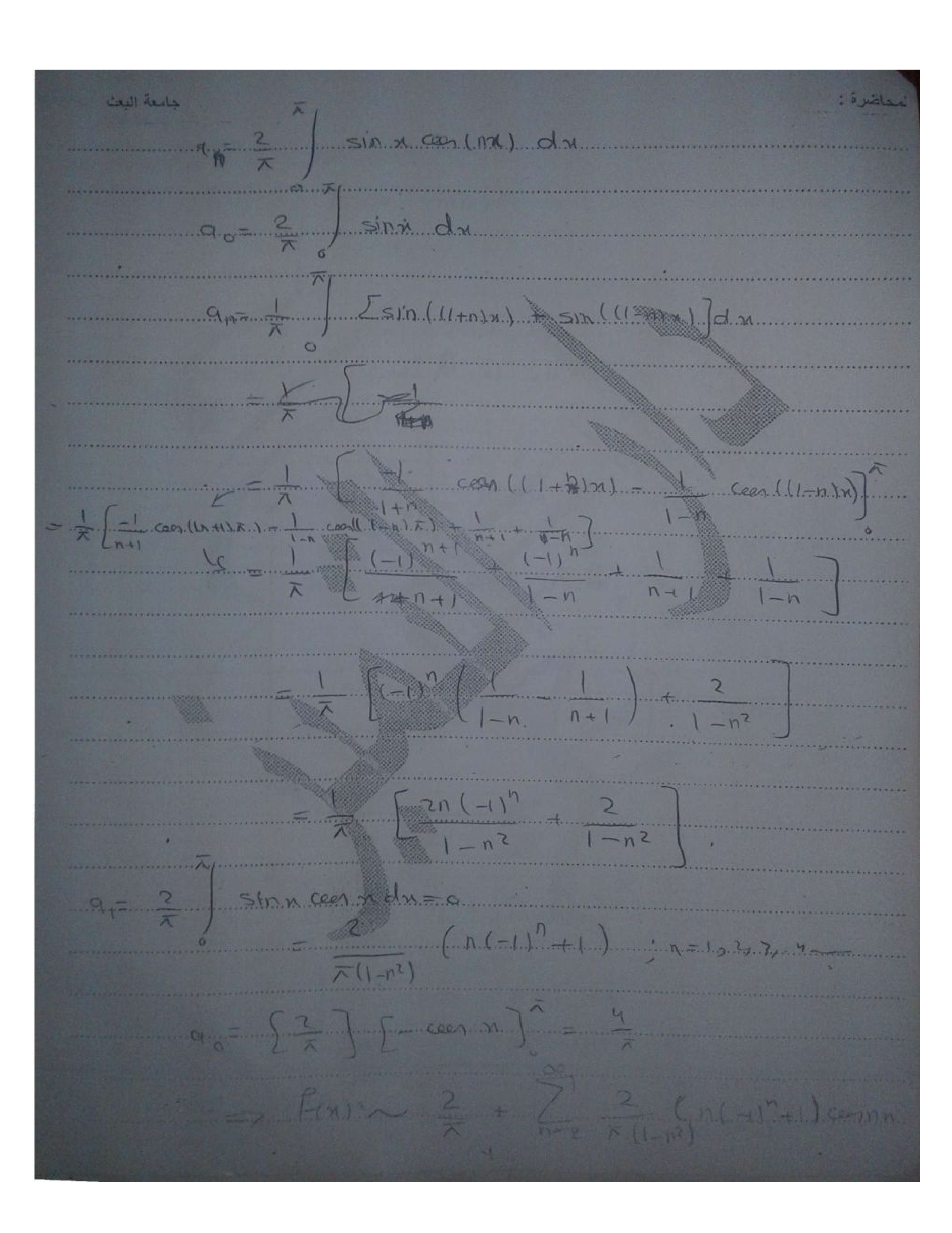
باستخدام التجزئة مرتين ... etc

أوجد منشور فورييه للدالة $f(x) = \sin x \;,\; x \in [0, \pi]$
فقط [illegible] لسلسلة جيوب عام فقط ،

نقوم بتمديد الدالة على المجال $[-\pi, \pi]$ فتصبح على الشكل

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \; 0 < x < \pi \\ -\sin x & ; \; -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Scanned by CamScanner



$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos(nx)\, dx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \left[\sin((1+n)x) + \sin((1-n)x)\right] dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{1+n}\cos((1+n)x) - \frac{1}{1-n}\cos((1-n)x)\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{n+1}\cos((n+1)\pi) - \frac{1}{1-n}\cos((1-n)\pi) + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \frac{(-1)^n}{1-n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(-1)^n\left(\frac{1}{1-n} - \frac{1}{n+1}\right) + \frac{2}{1-n^2}\right]$$

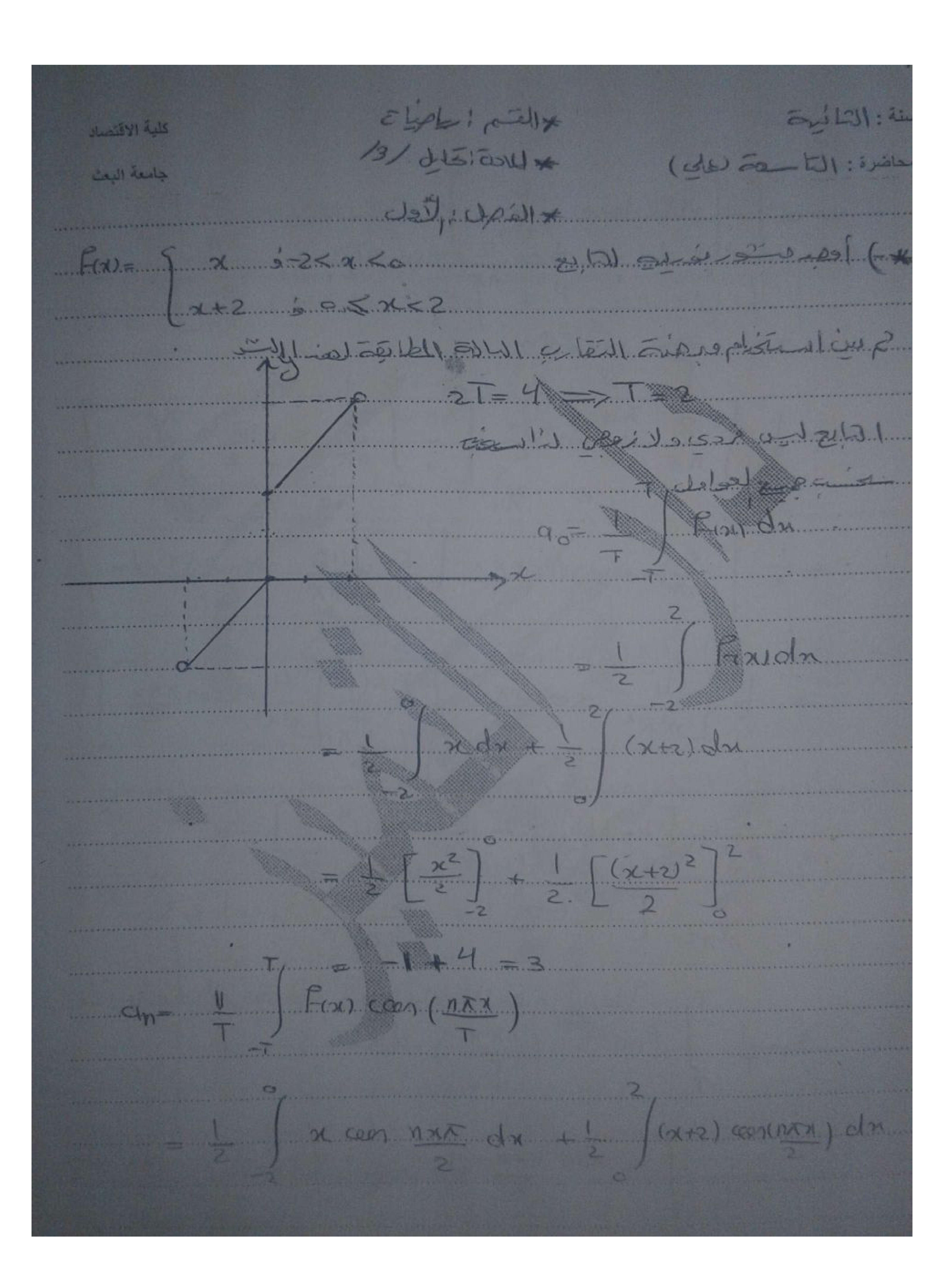
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{2n(-1)^n}{1-n^2} + \frac{2}{1-n^2}\right]$$

$$a_1 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x\, dx = 0$$

$$= \frac{2}{\pi(1-n^2)}\left(n(-1)^n + 1\right) \quad ; n = 1, 2, 3, 4$$

$$a_0 = \left\{\frac{2}{\pi}\right\}\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = \frac{4}{\pi}$$

$$\Rightarrow f(x) \sim \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\pi(1-n^2)}\left(n(-1)^n + 1\right)\cos nx$$



*) أوجد سلسلة فورييه للتابع

$$f(x) = \begin{cases} x & ; -2 < x < 0 \\ x+2 & ; 0 \le x < 2 \end{cases}$$

ثم بين باستخدام مبرهنة التقارب الحالة المطابقة لهذا التابع

$$2T = 4 \Longrightarrow T = 2$$

التابع ليس فردي ولا زوجي لذا سنحسب جميع المعاملات

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(x)\,dx$$

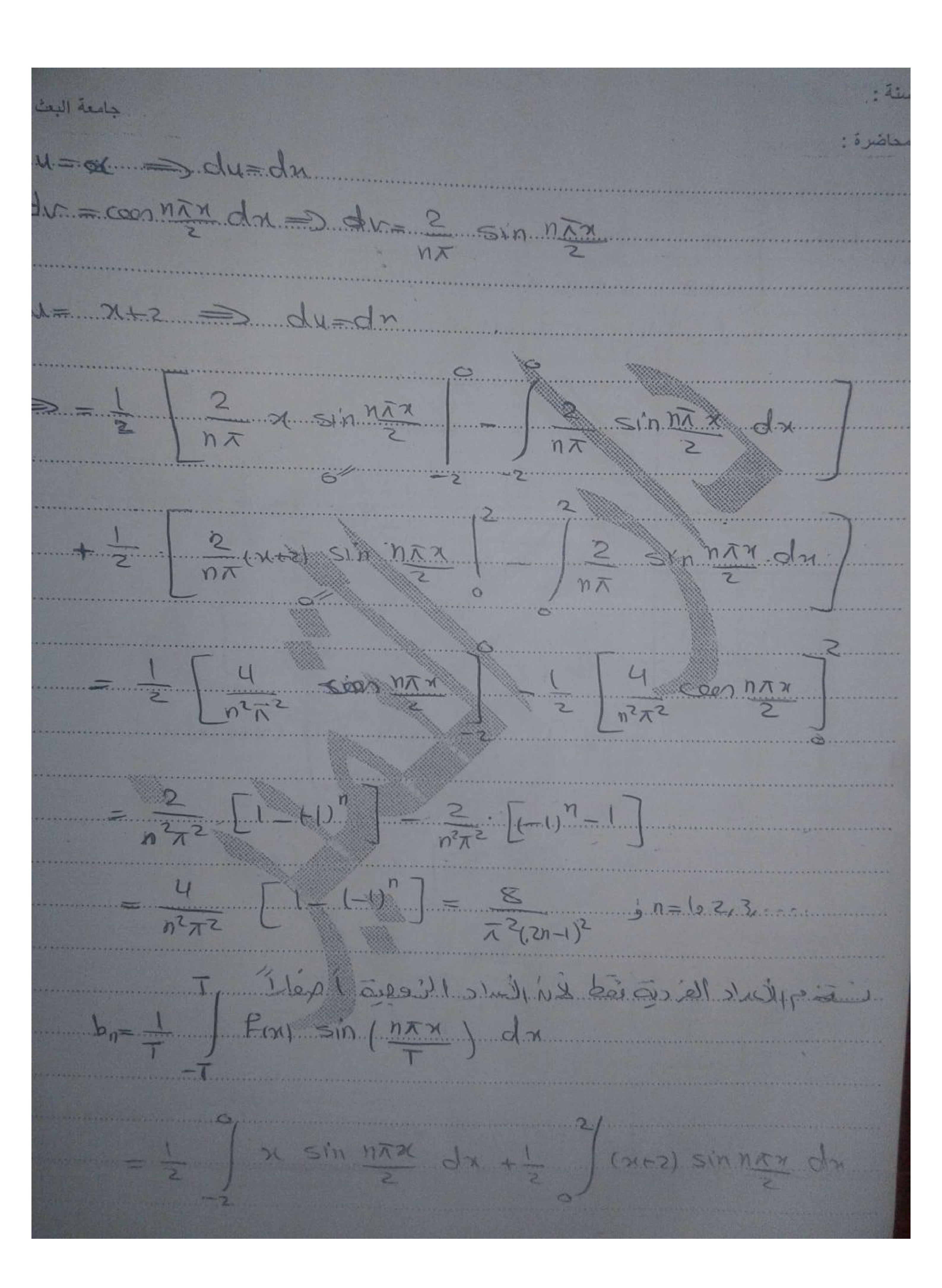
$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} x\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2} (x+2)\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{(x+2)^2}{2}\right]_{0}^{2}$$

$$= -1 + 4 = 3$$

$$a_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{T}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} x\cos\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(x+2)\cos\left(\frac{n\pi x}{2}\right)dx$$



جامعة البعث

السنة :

المحاضرة :

$u = x \Rightarrow du = dx$

$dv = \cos\frac{n\pi x}{2}\,dx \Rightarrow v = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}$

$u = x+2 \Rightarrow du = dx$

$$\Rightarrow = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} - \int_{-2}^{0}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}(x+2)\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} - \int_{0}^{2}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{-2}^{0} - \frac{1}{2}\left[\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\right]_{0}^{2}$$

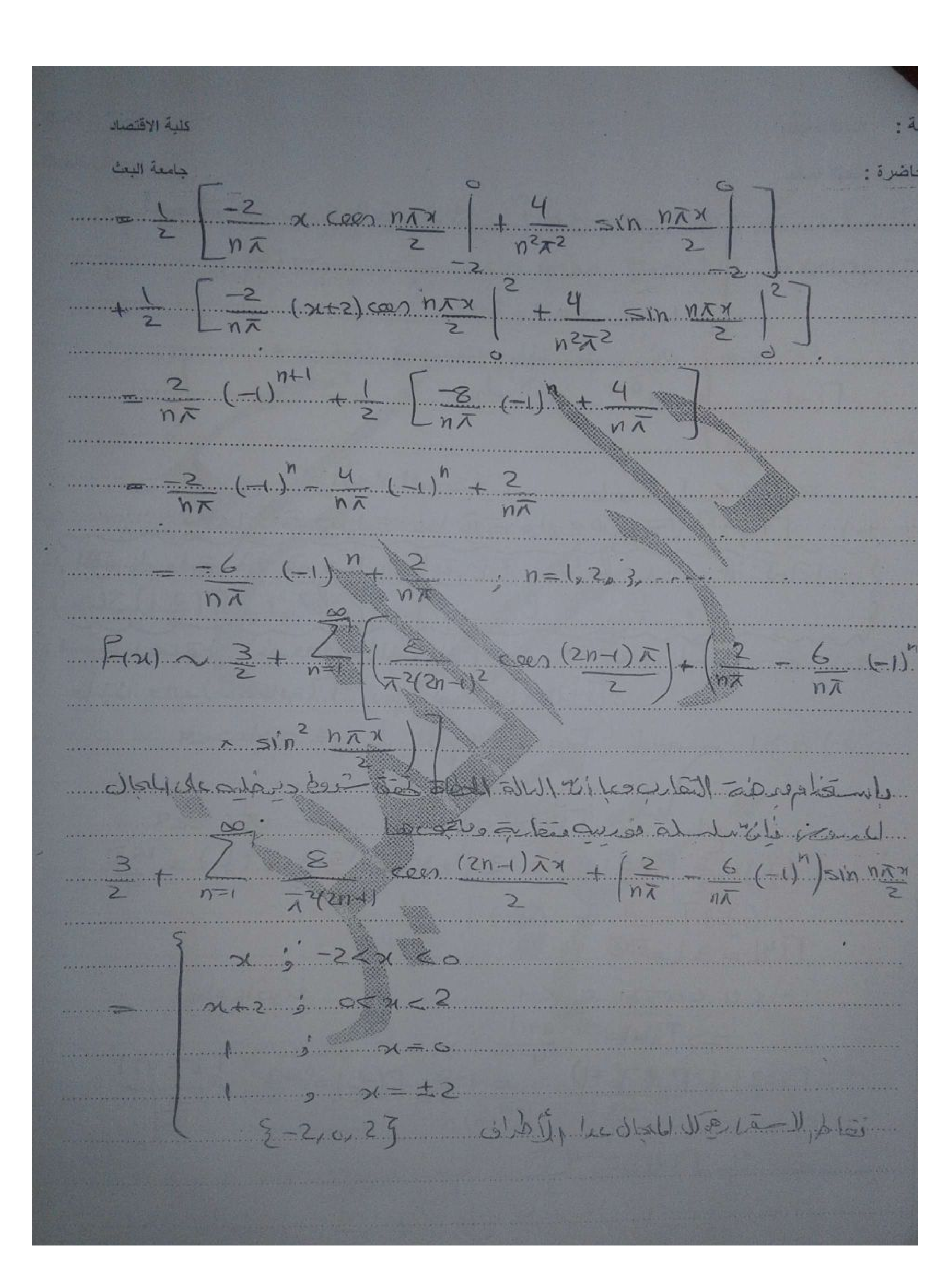
$$= \frac{2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right] - \frac{2}{n^2\pi^2}\left[(-1)^n - 1\right]$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right] = \frac{8}{\pi^2(2n-1)^2} \quad ; n = 1, 2, 3, \dots$$

نستخدم الأعداد الفردية فقط لأن الأعداد الزوجية أصفاراً

$$b_n = \frac{1}{T}\int_{-T}^{T} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{T}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-2}^{0} x\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(x+2)\sin\frac{n\pi x}{2}\,dx$$



$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}\, x \cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{-2}^{0}\right]$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{-2}{n\pi}(x+2)\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2} + \frac{4}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_{0}^{2}\right]$$

$$= \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}\left[\frac{-8}{n\pi}(-1)^n + \frac{4}{n\pi}\right]$$

$$= \frac{-2}{n\pi}(-1)^n - \frac{4}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi}$$

$$= \frac{-6}{n\pi}(-1)^n + \frac{2}{n\pi} \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{8}{\pi^2(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}\right) + \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{6}{n\pi}(-1)^n\right.\right.$$

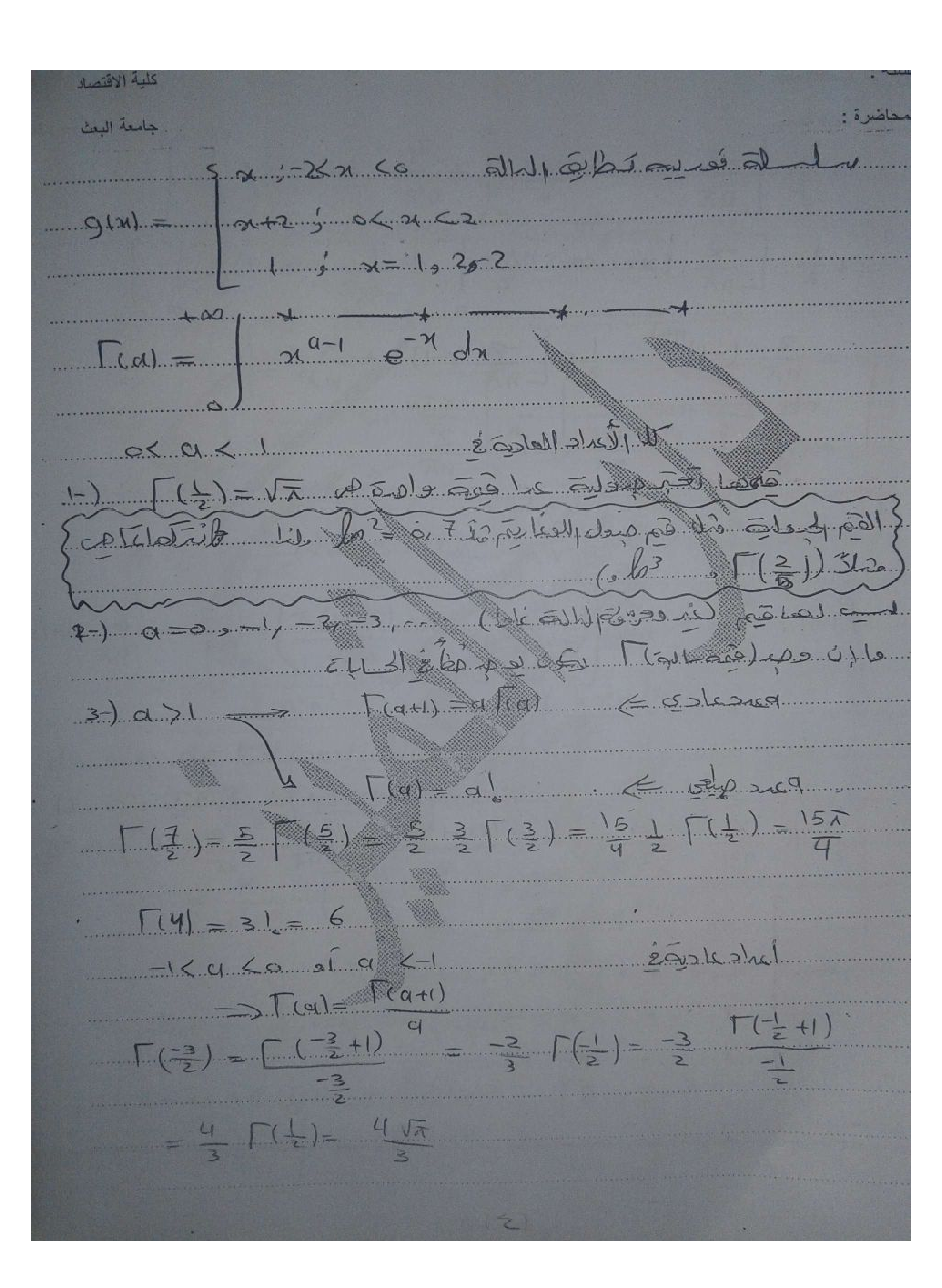
$$\left.\left.\times \sin^2\frac{n\pi x}{2}\right)\right]$$

باستخدام مبرهنة التقارب وبما أن الدالة المعطاة تحقق شروط ديرخليه على المجال المدروس فإن سلسلة فورييه متقاربة ومجموعها

$$\frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{8}{\pi^2(2n-1)}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2} + \left(\frac{2}{n\pi} - \frac{6}{n\pi}(-1)^n\right)\sin\frac{n\pi x}{2}$$

$$= \begin{cases} x & ; \ -2 < x < 0 \\ x+2 & ; \ 0 < x < 2 \\ 1 & ; \ x = 0 \\ 1 & , \ x = \pm 2 \end{cases}$$

$\{-2, 0, 2\}$ نقاط الاستمرار هي كل المجال عدا الأطراف



سلسلة فورييه لتطابق الدالة

$$g(x) = \begin{cases} x \ ; & -2 < x < 0 \\ x+2 \ ; & 0 < x < 2 \\ 1 \ ; & x = 1, 2, -2 \end{cases}$$

$$\Gamma(a) = \int_0^{+\infty} x^{a-1} e^{-x} \, dx$$

$0 < a < 1$ كل الأعداد العادية

1-) $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ قيمها تحسب جدولية عدا قيمة واحدة هي

القيم الجدولية مثل قيم جدول اللوغاريتم مثل $\ln 7$ و $\ln^2$ لذا ... مثلاً $\Gamma(\frac{2}{3})$ و $\ln^3$

2-) $a = 0, -1, -2, -3, \ldots$ ليس لها قيم (غير معرفة الدالة عندها)

ما إن وجد (قيمة سالبة) Γ نكون ليس ... الحالة

3-) $a > 1 \longrightarrow \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \Leftarrow$ عدد عادي

$\Gamma(a) = a! \Leftarrow$ عدد طبيعي

$$\Gamma(\tfrac{7}{2}) = \tfrac{5}{2}\Gamma(\tfrac{5}{2}) = \tfrac{5}{2}\cdot\tfrac{3}{2}\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \tfrac{15}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{15\pi}{4}$$

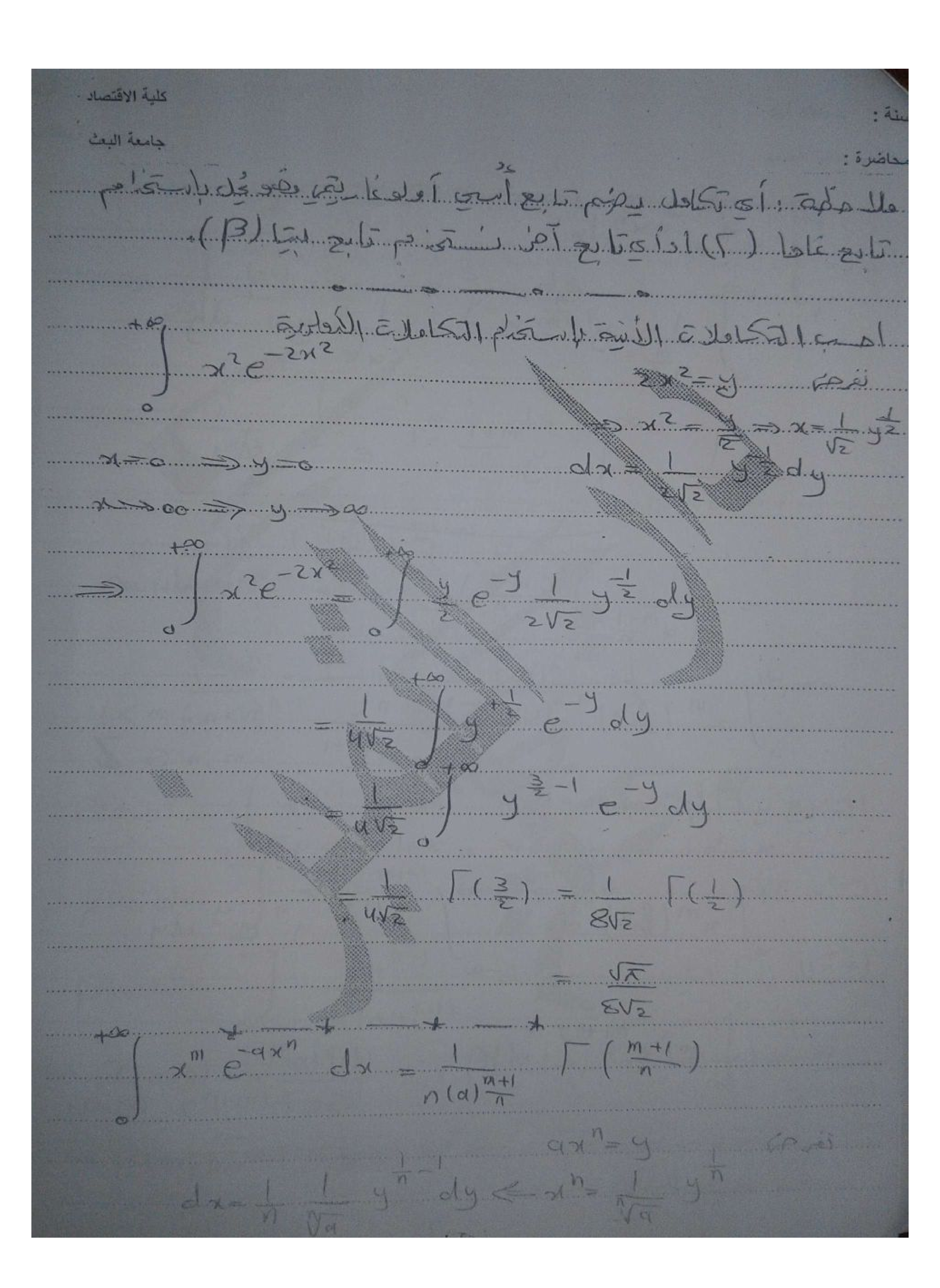
$$\Gamma(4) = 3! = 6$$

$-1 < a < 0$ أو $a < -1$ أعداد عادية

$$\Rightarrow \Gamma(a) = \frac{\Gamma(a+1)}{a}$$

$$\Gamma(\tfrac{-3}{2}) = \frac{\Gamma(\frac{-3}{2}+1)}{\frac{-3}{2}} = \frac{-2}{3}\Gamma(\tfrac{-1}{2}) = \frac{-3}{2}\cdot\frac{\Gamma(\frac{-1}{2}+1)}{\frac{-1}{2}}$$

$$= \frac{4}{3}\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \frac{4\sqrt{\pi}}{3}$$



ملاحظة : أي تكامل يضم تابع أسي أو لوغاريتمي وهو يحل باستخدام تابع غاما (Γ) . أما إذا أي تابع آخر نستخدم تابع بيتا (β)

احسب التكاملات الآتية باستخدام التكاملات الأويلرية

$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x^2}$$

نفرض $2x^2 = y$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{y}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} y^{\frac{1}{2}}$$

$$dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$x = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{y}{2} e^{-y} \frac{1}{2\sqrt{2}} y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{1}{2}} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} y^{\frac{3}{2}-1} e^{-y} dy$$

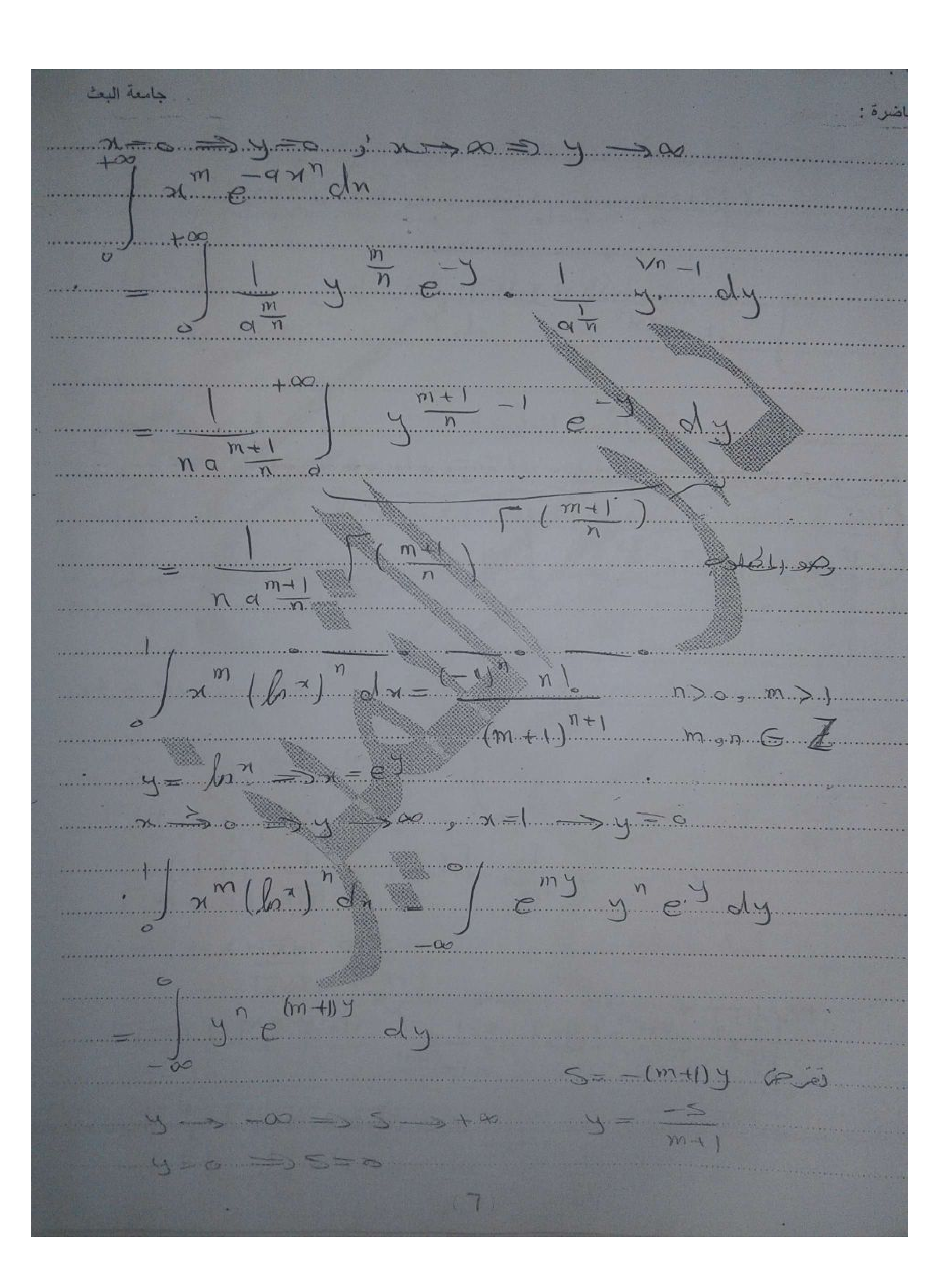
$$= \frac{1}{4\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8\sqrt{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{2}}$$

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-ax^n} dx = \frac{1}{n(a)^{\frac{m+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$

نفرض $ax^n = y$

$$dx = \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} y^{\frac{1}{n}-1} dy \Leftarrow x = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} y^{\frac{1}{n}}$$



$x=0 \Rightarrow y=0$ ، $x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-a x^n} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} y^{\frac{m}{n}} e^{-y} \cdot \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} y^{1/n - 1} dy$$

$$= \frac{1}{n a^{\frac{m+1}{n}}} \underbrace{\int_0^{+\infty} y^{\frac{m+1}{n} - 1} e^{-y} dy}_{\Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)}$$

$$= \frac{1}{n a^{\frac{m+1}{n}}} \Gamma\left(\frac{m+1}{n}\right)$$ وهو المطلوب

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$ $n > 0 , m > 1$ ، $m , n \in \mathbb{Z}$

$y = \ln x \Rightarrow x = e^y$

$x \to 0 \Rightarrow y \to -\infty$, $x = 1 \Rightarrow y = 0$

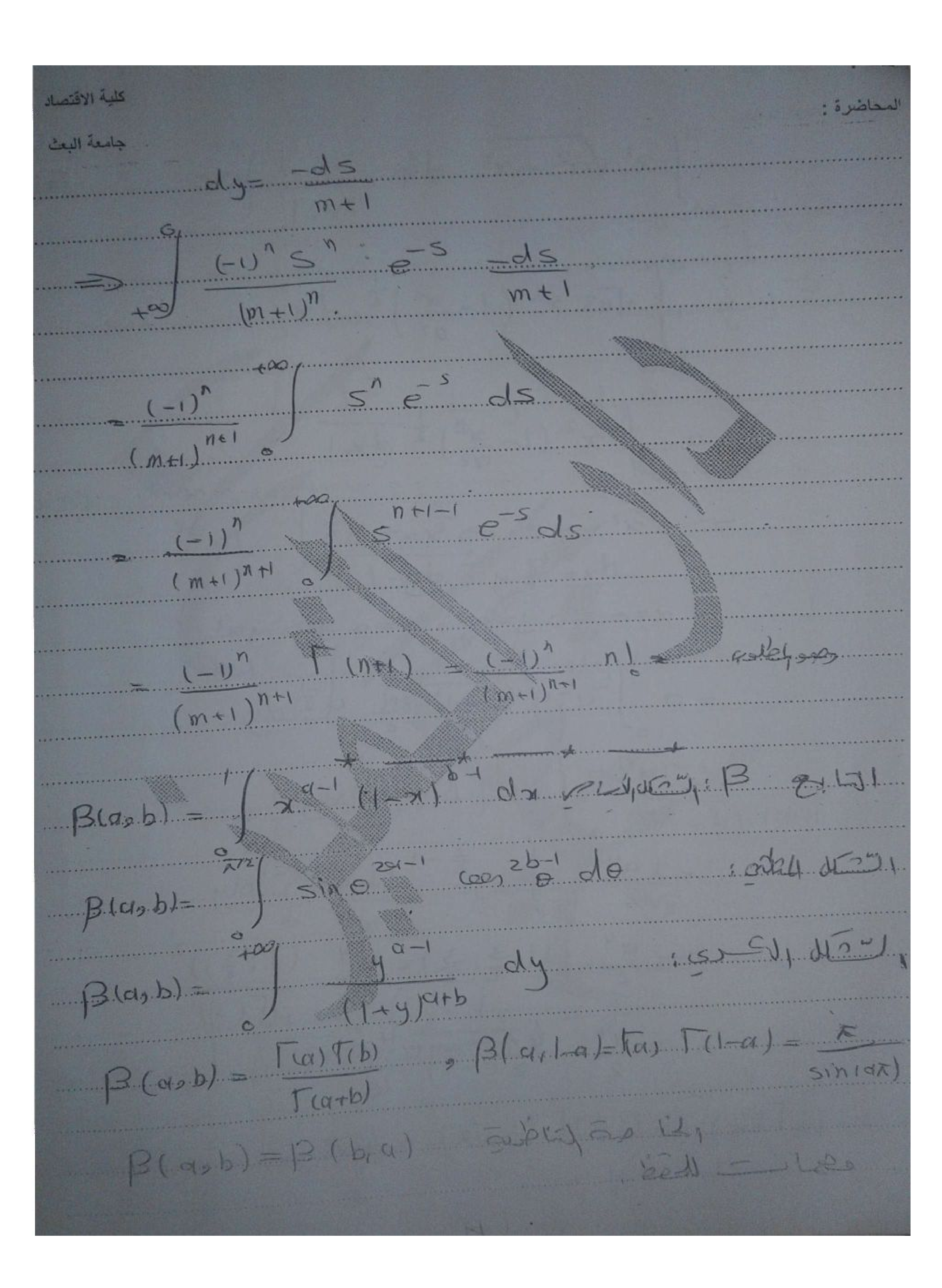
$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \int_{-\infty}^0 e^{my} y^n e^y dy$$

$$= \int_{-\infty}^0 y^n e^{(m+1)y} dy$$

نفرض $S = -(m+1)y$ ، $y = \frac{-S}{m+1}$

$y \to -\infty \Rightarrow S \to +\infty$

$y = 0 \Rightarrow S = 0$



$$dy = \frac{-ds}{m+1}$$

$$\Rightarrow \int_{+\infty}^{0} \frac{(-1)^n s^n}{(m+1)^n} \cdot e^{-s} \frac{-ds}{m+1}$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} s^n e^{-s} ds$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \int_0^{+\infty} s^{n+1-1} e^{-s} ds$$

$$= \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{(-1)^n}{(m+1)^{n+1}} n!$$ = وهو المطلوب

التابع β: الشكل الأساسي له

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx$$

الشكل المثلثي:

$$\beta(a,b) = \int_0^{\pi/2} \sin\theta^{2a-1} \cos^{2b-1}\theta \, d\theta$$

الشكل الآخر:

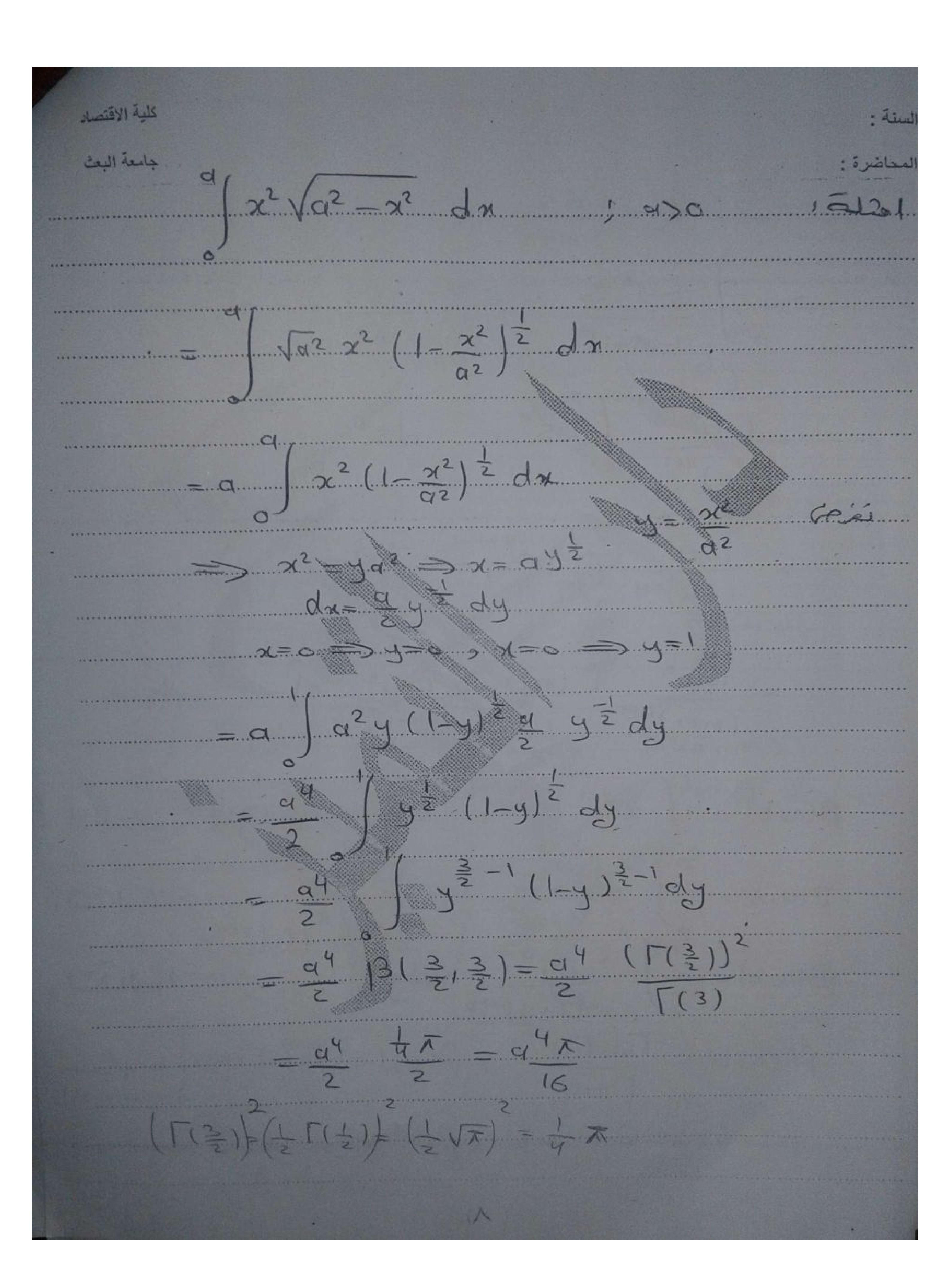
$$\beta(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a+b}} dy$$

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, \quad \beta(a,1-a) = \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin(a\pi)}$$

وله صفة التناظرية

$$\beta(a,b) = \beta(b,a)$$

مع أطيب التمنيات بالحظ



أمثلة:

$$\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx \quad ; \quad a>0$$

$$= \int_0^a \sqrt{a^2}\, x^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

$$= a\int_0^a x^2 \left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

نفرض $y=\dfrac{x^2}{a^2}$

$$\Rightarrow x^2 = y a^2 \Rightarrow x = a y^{\frac{1}{2}}$$

$$dx = \frac{a}{2} y^{-\frac{1}{2}} dy$$

$$x=0 \Rightarrow y=0 \quad , \quad x=0 \Rightarrow y=1$$

$$= a\int_0^1 a^2 y (1-y)^{\frac{1}{2}} \frac{a}{2}\, y^{-\frac{1}{2}} dy$$

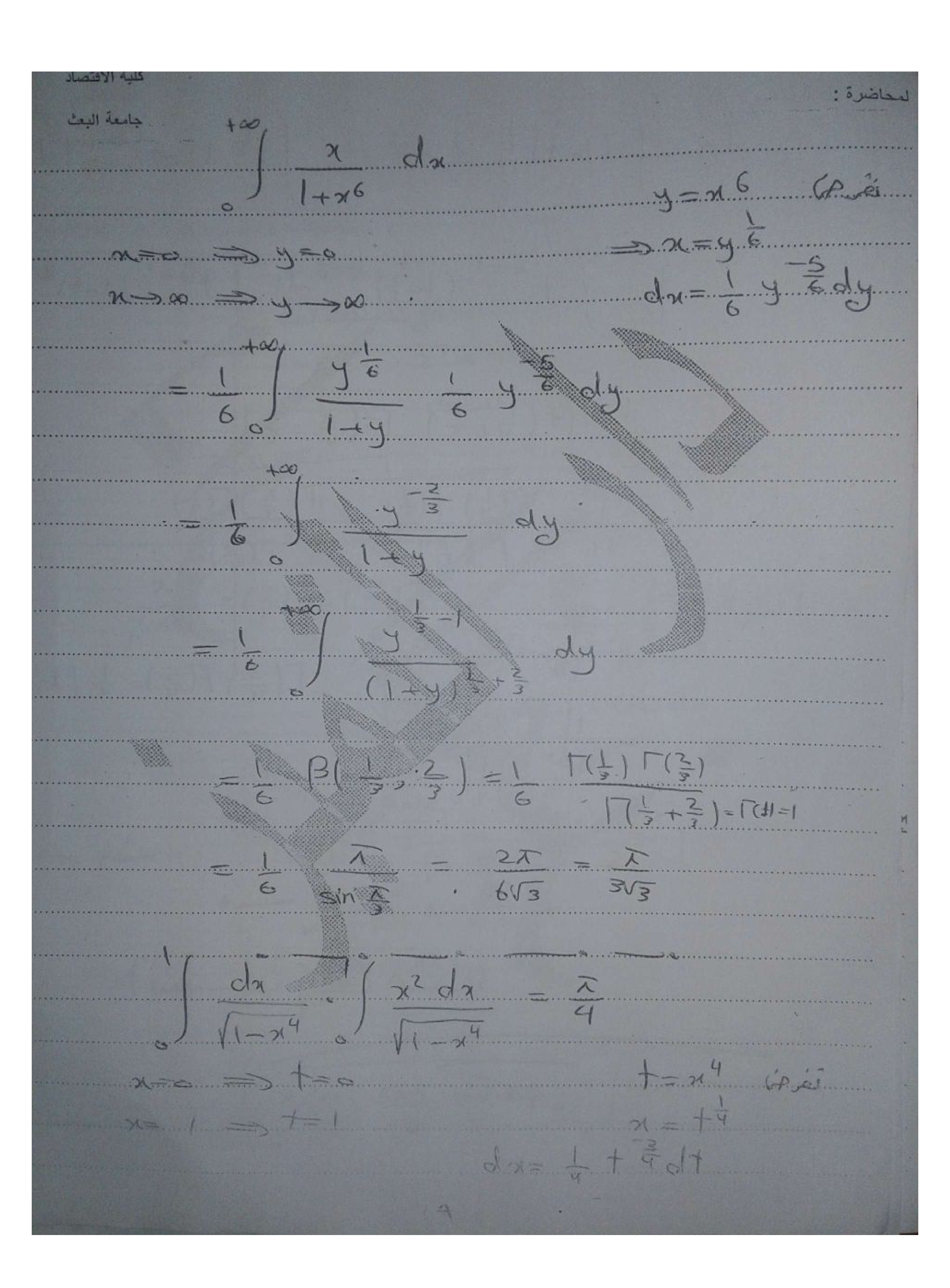
$$= \frac{a^4}{2}\int_0^1 y^{\frac{1}{2}} (1-y)^{\frac{1}{2}} dy$$

$$= \frac{a^4}{2}\int_0^1 y^{\frac{3}{2}-1} (1-y)^{\frac{3}{2}-1} dy$$

$$= \frac{a^4}{2}\, B\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{a^4}{2}\, \frac{\left(\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\right)^2}{\Gamma(3)}$$

$$= \frac{a^4}{2}\, \frac{\frac{1}{4}\pi}{2} = \frac{a^4\pi}{16}$$

$$\left(\Gamma\left(\tfrac{3}{2}\right)\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^2 = \tfrac{1}{4}\pi$$



$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^6}\, dx$$

نفرض $y = x^6$

$\Rightarrow x = y^{\frac{1}{6}}$

$dx = \frac{1}{6} y^{-\frac{5}{6}} dy$

$x = 0 \Rightarrow y = 0$

$x \to \infty \Rightarrow y \to \infty$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{1}{6}}}{1+y} \frac{1}{6} y^{-\frac{5}{6}} dy$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{y^{-\frac{2}{3}}}{1+y} dy$$

$$= \frac{1}{6} \int_0^{+\infty} \frac{y^{\frac{1}{3}-1}}{(1+y)^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}} dy$$

$$= \frac{1}{6} \beta\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{6} \frac{\Gamma(\frac{1}{3})\,\Gamma(\frac{2}{3})}{\Gamma(\frac{1}{3}+\frac{2}{3})} \qquad \Gamma(\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}) = \Gamma(1) = 1$$

$$= \frac{1}{6} \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \cdot \int_0^1 \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$$

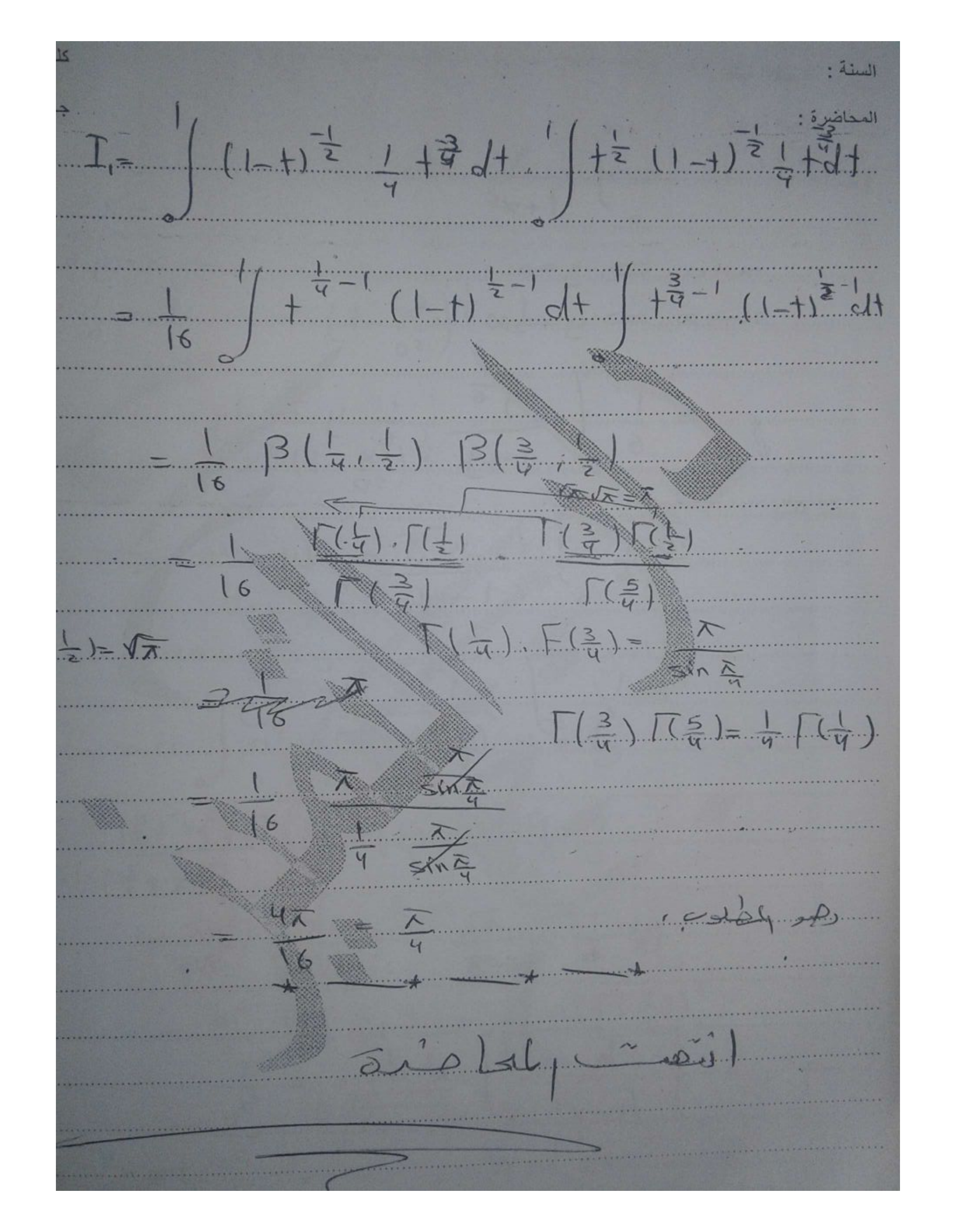
نفرض $t = x^4$

$x = 0 \Rightarrow t = 0$

$x = t^{\frac{1}{4}}$

$x = 1 \Rightarrow t = 1$

$dx = \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt$



السنة :

المحاضرة :

$$I_1 = \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt \cdot \int_0^1 t^{\frac{1}{2}} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{4} t^{-\frac{3}{4}} dt$$

$$= \frac{1}{16} \int_0^1 t^{\frac{1}{4}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt \int_0^1 t^{\frac{3}{4}-1} (1-t)^{\frac{1}{2}-1} dt$$

$$= \frac{1}{16} \beta\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) \beta\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right)$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi} = \pi$

$$= \frac{1}{16} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{16} \frac{\pi \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}}}{\frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}}}$$

$$= \frac{4\pi}{16} = \frac{\pi}{4}$$

وهو المطلوب .

* —— * —— * —— *

انتهت المحاضرة